

Introduzione alla Meccanica Quantistica

Prof. G.Giansiracusa

A.A. 2004/2005

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Cenni storici | 1 |
| 2 | L'esperimento di Young rivisitato | 2 |
| 2.1 | Esperimento con una mitragliatrice | 2 |
| 2.1.1 | Esperienza di Young | 5 |
| 2.1.2 | Esperimento con neutroni | 8 |
| 2.1.3 | Esperimento con protoni | 8 |
| 2.1.4 | Commento sulla complementarità | 11 |
| 2.1.5 | Due tipi di alternative | 11 |
| 3 | Critica della Meccanica Classica | 14 |
| 3.1 | Introduzione | 14 |
| 3.2 | Una nuova Meccanica | 15 |
| 3.3 | Le incompatibilità tra la nuova teoria e la Meccanica Classica . . | 16 |
| 3.4 | Il ruolo della Probabilità nella Nuova Fisica | 17 |
| 3.4.1 | Ruolo della probabilità negli esperimenti <i>à la Young</i> | 18 |
| 3.4.2 | Il senso fisico delle alternative e le nuove regole | 20 |
| 3.5 | La misura in Meccanica Quantistica | 21 |
| 3.5.1 | Una misura di impulso | 22 |
| 3.5.2 | Le misure ideali | 23 |
| 3.5.3 | Ampiezza di un processo di misura | 24 |
| 3.5.4 | ????? | 25 |
| 4 | Lo spazio di Hilbert degli stati | 26 |
| 4.1 | Introduzione | 26 |
| 4.2 | Variabili dinamiche ed operatori | 29 |
| 4.2.1 | Valor medio delle misure di una variabile dinamica | 30 |
| 4.2.2 | Una precisazione non priva di interesse | 32 |
| 4.3 | Compatibilità tra variabili dinamiche in Meccanica Quantistica . | 34 |
| 4.3.1 | Misure di posizione e di impulso | 35 |
| 4.4 | Variabili compatibili | 37 |
| 4.5 | Variabili Dinamiche incompatibili | 39 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Le traslazioni di spazio | 42 |
| 5.1 | Operatori di posizione e spettro continuo | 42 |
| 5.1.1 | Particella in una dimensione | 42 |
| 5.1.2 | Proprietà della delta di Dirac | 45 |
| 5.1.3 | Rappresentazione di Fourier della funzione di Dirac | 45 |
| 5.1.4 | Particella libera nello spazio | 47 |
| 5.2 | Le proprietà delle traslazioni di spazio | 50 |
| 5.3 | Le traslazioni nello spazio degli stati | 51 |
| 5.3.1 | Le traslazioni infinitesime nello spazio degli stati | 55 |
| 5.3.2 | Le traslazioni finite | 58 |
| 5.4 | Punto di vista passivo delle Traslazioni | 59 |
| 5.4.1 | Come cambia l'operatore di posizione in una traslazione | 60 |
| 5.4.2 | Le relazioni di commutazione posizione-impulso | 61 |
| 5.5 | Gli autostati di impulso | 62 |
| 5.5.1 | Completezza degli autostati di impulso | 64 |
| 5.5.2 | Cambiamento di rappresentazione | 66 |
| 5.5.3 | L'impulso nella rappresentazione delle coordinate | 66 |
| 5.5.4 | Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg | 67 |
| 5.5.5 | Osservabili invarianti per traslazioni | 68 |
| 6 | Le Equazioni del Moto | 71 |
| 6.1 | Operatore Evoluzione | 71 |
| 6.1.1 | Evoluzione Infinitesima | 73 |
| 6.2 | Uniformità del tempo | 74 |
| 6.2.1 | Proprietà dell'operatore Hamiltoniano | 77 |
| 6.2.2 | Stati stazionari | 78 |
| 6.2.3 | Particella isolata e costante di Plank | 78 |
| 6.2.4 | Il termine cinetico | 80 |
| 6.2.5 | Particella in un potenziale | 81 |
| 6.3 | Evoluzione dei valori medi | 83 |
| 6.3.1 | Valori medi negli stati stazionari | 84 |
| 6.3.2 | Le costanti del moto in Meccanica Quantistica | 85 |
| 6.3.3 | Invarianza rispetto alle traslazioni di spazio | 87 |
| 6.3.4 | Teorema di Ehrenfest | 88 |
| 6.3.5 | Approssimazione classica e teorema di Ehrenfest | 90 |
| 6.4 | La relazione di indeterminazione tempo-energia | 91 |
| 6.5 | Lo schema di Schrödinger | 92 |
| 6.6 | Lo schema di Heisenberg | 93 |
| 6.6.1 | Equazione del moto per U | 93 |
| 6.6.2 | L'equazione di Heisenberg | 94 |
| 6.6.3 | Osservazione 1 | 96 |
| 6.6.4 | Osservazione 2 | 96 |
| 6.6.5 | Costanti del moto nello schema di Heisenberg | 97 |

INDICE

iii

| | | |
|-------|-----------------------------------|----|
| 6.7 | Teorema di Ehrenfest | 97 |
| 6.7.1 | Algebra dei commutatori | 99 |

Capitolo 6

Le Equazioni del Moto

Fino ad ora abbiamo preso in considerazione le misure effettuate su un sistema sostanzialmente nello stesso istante in cui esso è stato prodotto (in un qualche stato ψ) da una data sorgente. Noi ci poniamo adesso il problema di determinare quale sarà ad un certo istante t lo stato di un sistema del quale si conosce lo stato ψ_0 ad un istante anteriore t_0 (che da qui in avanti) chiameremo *istante iniziale*. Il motivo fondamentale per cui dobbiamo aspettarci che in generale lo stato in cui viene a trovarsi il sistema al tempo t possa essere differente dallo stato in cui inizialmente esso è stato preparato è dovuto all'interazione tra il sistema e l'ambiente esterno. In altri termini noi pensiamo che sia questa interazione che genera la dinamica del sistema cioè la continua evoluzione del suo stato fisico. Nei paragrafi successivi dovremo tradurre in termini quantitativi queste considerazioni di natura essenzialmente empirica. Per il momento vogliamo mettere in rilievo che , se tra gli istanti t_0 e t noi non perturbiamo il sistema eseguendo per esempio operazioni di misura che possono arrecare mutamenti acausali sul sistema é lecito supporre che lo stato del sistema all'istante t dipenda in modo prevedibile dallo stato in cui si trovava il sistema all'istante iniziale. In altri termini noi affermiamo che esista una relazione deterministica tra lo stato finale e lo stato iniziale e che questa relazione possa mettersi sotto la forma di una equazione tra vettori dello spazio di Hilbert associato al sistema fisico: risolvendo questa equazione potremo allora determinare lo stato finale del sistema una volta che sia noto il suo stato iniziale. Nei paragrafi seguenti tradurremo in termini quantitativi queste semplici considerazioni di carattere essenzialmente qualitativo.

6.1 Operatore Evoluzione

Consideriamo un sistema fisico che sia stato preparato al tempo t_0 nello stato $|\psi_0\rangle$ e lasciamolo evolvere fino all'istante t senza perturbarlo in alcun modo con interventi di misura. In queste condizioni ogni eventuale variazione dello stato del sistema deve essere attribuita esclusivamente alla sua interazione con l'ambiente

esterno. Possiamo in queste condizioni affermare che all'istante $t > t_0$ il sistema verrà a trovarsi in uno stato ben determinato $|\psi, t_0, t\rangle$ dipendente in modo parametrico non solo dall'istante t ma anche dal suo stato iniziale al tempo t_0 . Naturalmente si deve porre:

$$|\psi, t_0, t_0\rangle = |\psi_0\rangle \quad (6.1)$$

Possiamo allora introdurre l' *Operatore Evoluzione temporale* $U(t, t_0)$ che trasforma lo stato del sistema al tempo t_0 nello stato che caratterizza il sistema al tempo t :

$$|\psi, t_0, t\rangle = U(t, t_0) |\psi, t_0, t_0\rangle \quad (6.2)$$

dove naturalmente si deve imporre:

$$U(t_0, t_0) = I \quad (6.3)$$

Siccome ad ogni istante deve essere garantito il principio di sovrapposizione degli stati si deve imporre che l'operatore evoluzione sia *lineare*.

Noi crediamo che lo stato finale deve dipendere in maniera univoca dallo stato iniziale, pertanto l'operatore U deve indurre una corrispondenza biunivoca tra $|\psi, t_0, t\rangle$ e $|\psi, t_0, t_0\rangle$. Siccome lo stato iniziale può essere un qualsiasi vettore dello spazio di Hilbert, ciò vuol dire che l'operatore di evoluzione temporale deve essere dotato di inverso. Inoltre la norma del vettore che rappresenta lo stato di un sistema ad un istante qualsiasi non può cambiare nel corso del tempo dato che essa è legata alla certezza di ottenere un risultato quale che sia in una serie ideale di misure sul sistema. In altri termini si deve imporre che si abbia:

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle &= \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi_0 | U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) | \psi_0 \rangle \quad \forall t, t_0 \text{ e } \forall |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

In altri termini l'operatore evoluzione deve essere unitario:

$$U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) = I \quad (6.4)$$

ovvero

$$\boxed{U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)} \quad (6.5)$$

Un'altra proprietà importante dell'operatore di evoluzione è contenuta nella seguente equazione:

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0) \quad (6.6)$$

che si dimostra semplicemente dal confronto tra le due seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} |\psi(t_2)\rangle &= U(t_2, t_0) |\psi(t_0)\rangle \\ |\psi(t_2)\rangle &= U(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle = U(t_2, t_1) U(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Si assume che la proprietà 6.6 sia valida quale che sia la successione dei tre istanti indicati. Nel caso particolare in cui $t_2 = t_0$ si ottiene

$$I = U(t_0, t_0) = U(t_0, t_1)U(t_1, t_0) \quad (6.7)$$

cioé

$$U^{-1}(t_1, t_0) = U^\dagger(t_1, t_0) = U(t_0, t_1) \quad (6.8)$$

6.1.1 Evoluzione Infinitesima

L'operatore $U(t + \delta t, t)$ relativo all'evoluzione temporale del sistema in un intervallo infinitesimo di tempo δt , deve differire per un termine infinitesimo dall'identità. Possiamo pertanto scrivere questo operatore come:

$$U(t + \delta t, t) = I - \frac{i}{\hbar} \delta t H(t) \quad (6.9)$$

Dove \hbar é la stessa costante già introdotta a proposito delle traslazioni spaziali ed $H(t)$ é un operatore hermitiano (in generale dipendente dal tempo) i cui autovalori hanno le dimensioni di una energia :

$$H^\dagger(t) = H(t) \quad (6.10)$$

Noi imponremo inoltre che $H(t)$ sia una osservabile e che i suoi autovettori formino una *base* dello spazio di Hilbert degli stati del sistema.

L'operatore H ha la funzione di *generatore delle traslazioni temporali* del sistema e quindi gioca nel contesto quantistico un ruolo analogo a quello della variabile Hamiltoniana della formulazione Canonica della Meccanica Classica . Pertanto da ora in avanti indicheremo H come l'operatore *Hamiltoniano* del sistema. Dobbiamo naturalmente imporre che per i sistemi macroscopici i risultati quantistici debbono convergere verso i risultati classici e ciò può essere ottenuto solo se assegnamo un valore ben determinato alla costante \hbar che fin'ora è rimasta in qualche modo indeterminata.

Affronteremo tra poco questo problema mentre adesso vogliamo rivolgere l'attenzione alla legge dinamica del sistema cioè alla legge che regola la variazione nel tempo dello stato del nostro sistema.

A questo scopo osserviamo che :

$$| \psi(t + \delta t) \rangle = U(t + \delta t, t) | \psi(t) \rangle = (I - \frac{i}{\hbar} \delta t H(t)) | \psi(t) \rangle \quad (6.11)$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{| \psi(t + \delta t) \rangle - | \psi(t) \rangle}{\delta t} = - \frac{i}{\hbar} H(t) | \psi(t) \rangle \quad (6.12)$$

Nel limite $\delta t \rightarrow 0$ il rapporto a primo membro definisce la derivata temporale del vettore $|\psi(t)\rangle$ e l'equazione precedente prende la forma:

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle} \quad (6.13)$$

nota come *Equazione di Schrödinger* del sistema.

L'equazione 6.13 regola l'evoluzione temporale dello stato fisico del sistema. Nella forma 6.13 essa è ancora una equazione astratta e per ottenere dei risultati quantitativi essa deve essere proiettata in una base scelta dello spazio di Hilbert. Per esempio, nel caso in cui il sistema è costituito da una sola particella puntiforme, la 6.13 può essere proiettata nella base degli autostati di posizione $|\mathbf{r}\rangle$. Otteniamo allora la Equazione di Schrödinger nella *rappresentazione delle coordinate* :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle = \langle \mathbf{r} | H(t) | \psi(t) \rangle \quad (6.14)$$

dove $\psi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle$ è la funzione d'onda della particella al tempo t . Osserviamo ora che la funzione $\langle \mathbf{r} | H(t) | \psi(t) \rangle$ dipende linearmente dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ e si può considerare ottenuta applicando alla funzione $\psi(\mathbf{r}, t)$ un operatore lineare differenziale $\mathcal{H}(t)$ definito nello spazio ℓ^2 delle funzioni di quadrato sommabile:

$$\langle \mathbf{r} | H(t) | \psi(t) \rangle \equiv \mathcal{H}(t) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.15)$$

Nella rappresentazione delle coordinate l'Equazione di Schrödinger prende così la forma:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}(t) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.16)$$

È chiaro da quanto abbiamo detto, che l'operatore $H(t)$ (come anche $\mathcal{H}(t)$) è determinato esclusivamente dalle proprietà dell'interazione tra il sistema e l'ambiente esterno. Così l'operatore $H(t)$ si può considerare il generatore delle traslazioni temporali del sistema e viene ad assumere un ruolo analogo a quello della *Funzione Hamiltoniana* della *Formulazione Canonica* della Meccanica Classica . Per questo motivo noi ci riferiremo da qui in avanti all'operatore $H(t)$ con il nome di *Operatore Hamiltoniano*.

6.2 Uniformità del tempo

L'operatore di evoluzione temporale acquista una interessante proprietà quando sul sistema è possibile imporre il principio di uniformità del tempo. Sappiamo, per esempio, che per un sistema isolato non può avere alcuna implicazione fisicamente rilevante la scelta dell'istante a cui si attribuisce il valore nullo ($t = 0$). In Meccanica Quantistica questo fatto impone una proprietà notevole

all'operatore evoluzione. Questo capitolo tratterà le proprietà degli operatori dinamici legate alla uniformità del tempo. Assumeremo perciò, anche se non sarà detto sempre in modo esplicito, di trattare sistemi per i quali l'uniformità del tempo è garantita.

Supponiamo di aver preparato il sistema al tempo t_0 nello stato $|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle$. Dopo aver fatto liberamente evolvere il sistema eseguiamo delle misure al tempo t per determinare l'ampiezza di probabilità $\langle \varphi, t | \psi_0, t_0 \rangle$ di trovare al tempo t il sistema in un certo stato $|\varphi\rangle$:

$$\langle \varphi, t | \psi_0, t_0 \rangle = \langle \varphi | \psi(t) \rangle = \langle \varphi | U(t, t_0) | \psi_0 \rangle \quad (6.17)$$

Eseguiamo ora la stessa serie di operazioni preparando il sistema nello stato $|\psi_0\rangle$ al tempo $t_0 + \tau$ ed intraprendendo poi le misure al tempo $t + \tau$. L'ampiezza $\langle \varphi, t + \tau | \psi_0, t_0 + \tau \rangle$ che in seguito a queste misure il sistema venga trovato nello stato $|\varphi\rangle$ data da:

$$\langle \varphi, t + \tau | \psi_0, t_0 + \tau \rangle = \langle \varphi | U(t + \tau, t_0 + \tau) | \psi_0 \rangle \quad (6.18)$$

Se, come abbiamo assunto, il tempo è realmente uniforme (come avviene per un sistema isolato) questa ampiezza non può dipendere dall'intervallo di tempo τ e così dobbiamo imporre l'eguaglianza:

$$\langle \varphi, t + \tau | \psi_0, t_0 + \tau \rangle = \langle \varphi, t | \psi_0, t_0 \rangle \quad (6.19)$$

ovvero

$$\langle \varphi | U(t + \tau, t_0 + \tau) | \psi_0 \rangle = \langle \varphi | U(t, t_0) | \psi_0 \rangle \quad (6.20)$$

che, dovendo valere per tutti gli stati possibili, implica

$$U(t + \tau, t_0 + \tau) = U(t, t_0) \quad \forall t, t_0, \tau \quad (6.21)$$

In particolare per $\tau = -t_0$ si ottiene:

$$U(t, t_0) = U(t - t_0, 0) \equiv U(t - t_0) \quad (6.22)$$

In altri termini:

Se il tempo gode dalla proprietà di uniformità (come avviene per un sistema isolato), l'operatore evoluzione dipende solo dall'intervallo di tempo trascorso tra l'istante iniziale (di preparazione) e l'istante finale (di rivelazione) ma non dai loro valori assoluti nella scala scelta.

In queste condizioni si può definire un operatore di evoluzione ad un solo parametro per mezzo della relazione:

$$U(t) | \psi_0, 0 \rangle = | \psi(t) \rangle \quad (6.23)$$

Esso è ovviamente unitario e gode della seguente proprietà:

$$U^{-1}(t) = U(-t) \quad (6.24)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} U^{-1}(t) &\equiv U^{-1}(t + \tau, \tau) \\ &= U(\tau, t + \tau) = \quad (\text{ponendo } \tau = -t) \\ &= U(-t, 0) \\ &\equiv U(-t) \end{aligned}$$

Inoltre si ha:

$$I = U(t, t) = U(0, 0) \equiv U(0) \quad (6.25)$$

Per quanto riguarda l'operatore di evoluzione infinitesima si ha:

$$U(t + \delta t, t) = U(\delta t, 0) \quad (6.26)$$

da cui

$$I - \frac{i}{\hbar} \delta t H(t) = I - \frac{i}{\hbar} \delta t H(0) \quad (6.27)$$

Ciò significa che se il tempo scorre in modo uniforme l'operatore $H(t)$ non dipende esplicitamente dal tempo:

$$H(t) = H(0) \equiv H \quad (6.28)$$

In tal caso l'equazione del moto degli stati diviene:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = H | \psi(t) \rangle \quad (6.29)$$

L'operatore di evoluzione assume in questo caso una semplice forma analitica. Infatti dividiamo l'intervallo (t_1, t_2) in n parti uguali ciascuno di ampiezza $\tau = (t_2 - t_1)/n$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} U(t_2 - t_1) &= \dots U(t_1 + 2\tau, t_1 + \tau) U(t_1 + \tau, t_1) \\ &= \dots U(\tau) U(\tau) U(\tau) = [U(\tau)]^n \\ &= \left(I - \frac{iH}{\hbar} \tau \right)^n = \left[I - \frac{iH}{\hbar} \frac{(t_2 - t_1)}{n} \right]^n \end{aligned}$$

dove le operazioni di innalzamento a potenza sono rese possibili dall'indipendenza di H dal tempo. Possiamo poi scegliere l'intero n sempre più grande ed eseguire il limite $n \rightarrow \infty$ con il risultato:

$$U(t_2 - t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[I - \frac{iH}{\hbar} \frac{(t_2 - t_1)}{n} \right]^n \quad (6.30)$$

relazione, questa che definisce la funzione esponenziale:

$$U(t_2 - t_1) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H (t_2 - t_1)\right) \quad (6.31)$$

6.2.1 Proprietà dell'operatore Hamiltoniano

Come abbiamo già detto, l'operatore H genera traslazioni nel tempo e perciò siamo indotti a metterlo in relazione con la funzione Hamiltoniana della Meccanica Classica. Vediamo fino a che punto si può spingere questa corrispondenza.

Risolvere il problema agli autovalori per l'operatore Hamiltoniano è una questione di fondamentale importanza per lo studio della dinamica di un sistema quantistico. Possiamo infatti mostrare che la conoscenza di tutti gli autovalori e di tutti gli autovettori di H permette di determinare lo stato del sistema ad ogni istante una volta che esso sia noto all'istante iniziale.

A questo proposito consideriamo il caso semplice in cui lo spettro di H sia interamente discreto e non degenerare:

$$H | \varphi_n \rangle = E_n | \varphi_n \rangle \quad (6.32)$$

dove $| \varphi_n \rangle$ sono gli autovettori normalizzati di H che formano una base dello spazio di Hilbert.

Supponiamo che sia noto lo stato del sistema $| \psi_0 \rangle$ all'istante iniziale ($t = 0$), e quindi che siano noti i coefficienti c_n del suo sviluppo di Fourier nella base $| \varphi_n \rangle$:

$$| \psi_0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n | \varphi_n \rangle \quad (6.33)$$

Lo stato del sistema ad un generico istante t è allora dato da:

$$\begin{aligned} | \psi(t) \rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) | \psi_0 \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) | \varphi_n \rangle \end{aligned} \quad (6.34)$$

Poiché si conoscono i coefficienti c_n e gli autovalori E_n di H la 6.34 implica la conoscenza dello stato del sistema ad ogni istante t .

6.2.2 Stati stazionari

Supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ il sistema si trovi in uno stato rappresentato da un autovettore $|\varphi_E\rangle$ di H relativo all'autovalore E :

$$|\psi_0\rangle = |\varphi_E\rangle \quad \text{dove} \quad H |\varphi_E\rangle = E |\varphi_E\rangle \quad (6.35)$$

Lo stato del sistema al tempo generico t sarà rappresentato da:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) |\psi_0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) |\varphi_E\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

Ciò indica che lo stato finale è rappresentato da un vettore che differisce da quello iniziale solo per un semplice fattore di fase. Pertanto lo stato finale coincide con lo stato iniziale, risultando ancora un autostato di H con autovalore E . In altri termini: un sistema preparato in un autostato di H con autovalore E resta sempre in quello stato con lo stesso autovalore di H . Per questo motivo, gli autostati di H sono chiamati anche *stati stazionari* del sistema, mentre l'equazione agli autovalori di H è conosciuta come *Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo*. Poiché in un sistema classico invariante per traslazioni temporali si conserva l'energia è lecito identificare gli autovalori E di H con i valori possibili di una variabile dinamica che si confronta con la grandezza classica che abbiamo chiamato energia.

6.2.3 Particella isolata e costante di Plank

Consideriamo ora il caso di una particella puntiforme isolata di massa m libera di muoversi in tutto lo spazio.

Come sappiamo, nel contesto classico l'energia e l'impulso di questa particella sono entrambe delle costanti del moto. Questo fatto ci induce ad ammettere che anche nel contesto quantistico questa particella possa essere inizialmente ($t = 0$) preparata in uno stato $|\psi_0\rangle$ che sia un autovettore comune dell'impulso \mathbf{P} e dell'Hamiltoniano H :

$$|\psi_0\rangle = |E, \mathbf{p}\rangle \quad (6.36)$$

dove:

$$\begin{aligned} H | E, \mathbf{p} \rangle &= E | E, \mathbf{p} \rangle \\ \mathbf{P} | E, \mathbf{p} \rangle &= \mathbf{p} | E, \mathbf{p} \rangle \end{aligned}$$

La prima implicazione di questo fatto è che i due operatori devono commutare:

$$[H, \mathbf{P}] = 0 \quad (6.37)$$

Avendo tacitamente ammesso che la particella in questione ha analogo classico, la relazione precedente implica che l'hamiltoniano viene ad essere una mera funzione dell'operatore \mathbf{P} . Daremo nel seguito alcune indicazioni di massima su come si può costruire in alcuni casi questa funzione, per il momento andiamo a vedere la forma analitica della funzione d'onda della particella al trascorre del tempo nella rappresentazione delle coordinate:

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= \langle \mathbf{r} | \psi, t \rangle \\ &= \langle \mathbf{r} | U(t) | \psi_0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{r} | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) | E, \mathbf{p} \rangle \\ &= \langle \mathbf{r} | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) | E, \mathbf{p} \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) \langle \mathbf{r} | E, \mathbf{p} \rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right)} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Questa funzione d'onda è un'onda piana di frequenza angolare:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad (6.39)$$

e di vettore d'onda:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \quad (6.40)$$

Quindi la Meccanica Quantistica associa al moto di una particella isolata un'onda piana monocromatica di frequenza ν :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{E}{2\pi\hbar} \quad (6.41)$$

e lunghezza d'onda λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (6.42)$$

Queste due relazioni diventano identiche alle relazioni di De Broglie:

$$E = h \nu \quad \text{e} \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (6.43)$$

se assumiamo che:

- gli autovalori \mathbf{p} dell'operatore \mathbf{P} coincidono con i valori dell'impulso classicamente definito per la particella;
- gli autovalori E dell'operatore H coincidono con i valori dell'energia classicamente definita per la particella;
- il fattore dimensionale $2\pi\hbar$ sia numericamente uguale alla costante di Planck h :

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \quad (6.44)$$

Da ora in poi questo sarà il valore attribuito alla costante dimensionale \hbar e con ciò ci sentiremo autorizzati a chiamare impulso l'operatore \mathbf{P} ed energie gli autovalori dell'operatore Hamiltoniano H .

6.2.4 Il termine cinetico

Possiamo spingere ulteriormente la corrispondenza tra grandezze classiche e quantistiche assumendo che l'hamiltoniano quantistico di una particella libera di massa m ha la forma del termine cinetico del contesto classico:

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \quad (6.45)$$

Studiamo a questo punto l'equazione agli autovalori di H :

$$H | \psi_E \rangle = E | \psi_E \rangle \quad (6.46)$$

nella rappresentazione delle coordinate:

$$\langle \mathbf{r} | H | \psi_E \rangle = E \langle \mathbf{r} | \psi_E \rangle \quad (6.47)$$

Per quanto riguarda l'elemento di matrice a sinistra di questa equazione si ha:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{r} | H | \psi_E \rangle &= \langle \mathbf{r} | \frac{\mathbf{P}^2}{2m} | \psi_E \rangle \\
 &= \langle \mathbf{r} | \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \frac{1}{2m} | \psi_E \rangle \\
 &= - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \langle \mathbf{r} | \psi_E \rangle \\
 &= - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_E(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

dove abbiamo definito la funzione d'onda:

$$\psi_E(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{r} | \psi_E \rangle \tag{6.49}$$

Così nella rappresentazione delle coordinate l'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniano assume l'aspetto della seguente equazione differenziale:

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_E(\mathbf{r}, t) = E \psi_E(\mathbf{r}, t) \tag{6.50}$$

Pertanto nella rappresentazione delle coordinate:

- lo stato del sistema è rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(r, t) = \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle \tag{6.51}$$

- all'operatore impulso \mathbf{P} corrisponde l'operatore differenziale gradiente:

$$\mathbf{P} \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \tag{6.52}$$

- alla parte cinetica dell'Hamiltoniano corrisponde l'operatore differenziale laplaciano:

$$\frac{P^2}{2m} \longrightarrow - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \tag{6.53}$$

6.2.5 Particella in un potenziale

Quando la particella non è isolata ma interagisce con l'ambiente esterno, è spesso possibile desumere la forma dell'Hamiltoniano quantistico dalla forma classica della funzione di Hamilton. In altri termini noi ammettiamo che in questi casi l'interazione tra la particella e l'ambiente esterno può essere rappresentata da un termine di potenziale dipendente dalle coordinate spaziali della particella.

Scriveremo pertanto l'Hamiltoniano di una tale particella sotto la forma:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{R}) \quad (6.54)$$

dove :

$$\mathbf{P}^2 \equiv P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \quad (6.55)$$

e $V(\mathbf{R})$ è una opportuna funzione dell'operatore posizione \mathbf{R} .

L'Equazione di Schrödinger per questa particella ha la forma astratta:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle = \left(\frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{R}) \right) | \psi(t) \rangle \quad (6.56)$$

Per trovare la forma di questa equazione nella rappresentazione delle coordinate, moltiplichiamo la 6.56 a sinistra per $\langle \mathbf{r} |$:

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle &= \langle \mathbf{r} | \left(\frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{R}) \right) | \psi(t) \rangle \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Così l'Equazione di Schrödinger nella rappresentazione delle coordinate è:

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{partpotr})$$

Troviamo adesso l'Equazione di Schrödinger nella rappresentazione degli impulsi. A tal fine moltiplichiamo a sinistra l'eq. 6.56 per un auto-bra di impulso $\langle \mathbf{p} |$:

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle &= \langle \mathbf{p} | \left(\frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{R}) \right) | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{p^2}{2m} \langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle + \langle \mathbf{p} | V(\mathbf{R}) | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Adesso bisogna valutare l'elemento di matrice $\langle \mathbf{p} | V(\mathbf{R}) | \psi(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | V(\mathbf{R}) | \psi(t) \rangle &= \int d^3r \langle \mathbf{p} | V(\mathbf{R}) | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3r V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3p' d^3r V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p' d^3r V(\mathbf{r}) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}} \langle \mathbf{p}' | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3p' \mathcal{V}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \langle \mathbf{p}' | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la trasformata di Fourier del potenziale:

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint d^3r V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (6.57)$$

Otteniamo infine l'Equazione di Schrödinger nella rappresentazione degli impulsi:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, t) + \iiint d^3p' \mathcal{V}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}', t) \quad (6.58)$$

6.3 Evoluzione dei valori medi

Studiamo come varia nel tempo il valor medio di una osservabile fisica A associata alla dinamica del sistema fisico considerato.

Sia $A(t)$ una osservabile eventualmente dipendente dal tempo in modo esplicito e sia $|\psi(t)\rangle$ il vettore ket opportunamente normalizzato:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (6.59)$$

che rappresenta lo stato del sistema al tempo t .

Il valor medio di A al tempo t é dato da :

$$\langle A \rangle_t \equiv \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \quad (6.60)$$

Eseguiamo la derivata temporale di questo valor medio:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle_t &= \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \left[\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \right] A | \psi(t) \rangle \\ &\quad + \langle \psi(t) | A(t) \left[\frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle \right] \\ &\quad + \langle \psi(t) | \left[\frac{dA(t)}{dt} \right] | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Applicando a questa l'Equazione di Schrödinger si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle_t &= - \left[\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | H \right] A | \psi(t) \rangle \\ &\quad + \langle \psi(t) | A(t) \left[\frac{1}{i\hbar} | \psi(t) \rangle \right] \\ &\quad + \langle \psi(t) | \left[\frac{\partial A(t)}{\partial t} \right] | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle_t &= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t) | (A(t)H - HA(t)) | \psi(t) \rangle + \\ &\quad + \langle \psi(t) | \left[\frac{\partial A(t)}{\partial t} \right] | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Il risultato finale é l'equazione del moto per il valor medio di $A(t)$, cioè l'equazione che regola il modo in cui il valor medio di una variabile dinamica cambia nel tempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \langle [A(t), H] \rangle_t + i\hbar \left\langle \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\rangle_t \quad (6.61)$$

Nel caso in cui A é una osservabile non dipendente esplicitamente dal tempo l'equazione (6.61) diviene piú semplice :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \langle [A, H] \rangle_t \quad (\text{smpl})$$

Applichiamo quest'ultima relazione al calcolo del valor medio dell'hamiltoniano H non dipendente esplicitamente dal tempo. Ponendo nella (smpl) otteniamo:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle H \rangle_t &= \langle [H, H] \rangle_t \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

La (6.62) mostra che:

Quando l'hamiltoniano H non dipende esplicitamente dal tempo, il valor medio dell'energia non varia nel corso dell'evoluzione del sistema :

$$\langle H \rangle_t = \text{costante} \quad (6.63)$$

6.3.1 Valori medi negli stati stazionari

Consideriamo un sistema il cui Hamiltoniano H è indipendente dal tempo e supponiamo di averlo preparato all'istante iniziale $t = 0$ in uno stato stazionario $|\psi_0\rangle$ di energia E :

$$H |\psi_0\rangle = E |\psi_0\rangle \quad (6.64)$$

Come si é già visto in 6.2.2, in queste condizioni lo stato del sistema non cambia nel corso del tempo se non per un semplice fattore di fase:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right) |\psi_0\rangle \quad (6.65)$$

ed in particolare rimane sempre autostato di H con lo stesso autovalore:

$$H |\psi(t)\rangle = E |\psi(t)\rangle \quad (6.66)$$

Partendo da questi presupposti si dimostra facilmente la seguente affermazione:

se il sistema si trova in uno stato stazionario, allora il valor medio di una qualsiasi osservabile resta costante nel tempo

Infatti l'equazione del moto del valor medio di una qualsiasi osservabile A in questo caso produce il risultato:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle_t &= \langle [A, H] \rangle_t \\ &= \langle \psi(t) | AH | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | HA | \psi(t) \rangle \\ &= E[\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle] \\ &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\langle A \rangle_t = \text{cost} \quad (6.67)$$

Con la stessa tecnica possiamo mostrare che non solo il valor medio ma anche tutti gli altri momenti statistici della distribuzione di misure di A restano costanti nel tempo. Proviamo questa affermazione per il valor medio di A^2 :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle A^2 \rangle_t &= \langle [A^2, H] \rangle_t \\ &= \langle \psi(t) | A^2 H | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | H A^2 | \psi(t) \rangle \\ &= E(\langle \psi(t) | A^2 | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | A^2 | \psi(t) \rangle) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.68)$$

da cui

$$\langle A^2 \rangle_t = \text{cost} \quad (6.69)$$

e ciò naturalmente implica la costanza nel tempo dello scarto quadratico medio delle misure di A .

Per iterazione di questo procedimento si mostra senza difficoltà che:

$$\langle A^n \rangle_t = \text{cost} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.70)$$

e cioè risulta invariabile nel tempo anche il valor medio di una qualsiasi potenza intera di A .

6.3.2 Le costanti del moto in Meccanica Quantistica

Nel caso in cui l'hamiltoniano H del sistema non dipende esplicitamente dal tempo esistono alcune grandezze, dette Costanti del Moto, che godono di proprietà particolarmente interessanti.

Definizione:

Una osservabile K non dipendente esplicitamente dal tempo si chiama *Costante del moto* se il suo valor medio (e con esso tutti gli altri momenti statistici) non varia durante l'evoluzione temporale del sistema:

$$\frac{d}{dt} \langle K \rangle_t = 0 \quad (6.71)$$

In base all'eq. sempl affinché K sia una costante del moto si deve avere ad ogni istante:

$$\langle [K, H] \rangle_t = 0 \quad (6.72)$$

In generale la validità della 6.72 dipende dalle proprietà specifiche dello stato del sistema e dalle caratteristiche dell'interazione tra il sistema e l'ambiente esterno. I risultati del paragrafo precedente mostrano che la 6.72 è certamente soddisfatta $\forall K$ se il sistema si trova in uno stato stazionario. In generale è assai difficile determinare le caratteristiche dello stato che garantiscono la costanza di K durante l'evoluzione del sistema. Esiste tuttavia una classe di variabili dinamiche per le quali si mostra facilmente che sono costanti del moto in ogni circostanza: le osservabili che commutano con l'Hamiltoniano del sistema. Mostriamo infatti che:

Una osservabile K che commuta con H è una costante del moto

Infatti, se

$$[K, H] = 0 \quad (6.73)$$

si ha ad ogni istante

$$\langle [K, H] \rangle_t = 0 \quad (6.74)$$

e ciò implica che:

$$\langle K \rangle_t = \text{cost} \quad (6.75)$$

Possiamo dunque affermare che:

Se l'osservabile K commuta con l'Hamiltoniano del sistema, allora, qualunque sia lo stato iniziale in cui quest'ultimo è stato preparato, il valor medio di K è un invariante cioè non cambia nel corso del tempo.

Per queste osservabili si dimostra il seguente interessante risultato:

Se il sistema è stato preparato inizialmente in un autostato di una osservabile K commutante con H , il sistema si troverà ad ogni istante in un autostato di K con lo stesso autovalore iniziale.

Infatti sia $|\psi_0\rangle$, autostato di K , lo stato del sistema all'istante iniziale t_0 :

$$|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle \quad \text{dove} \quad K|\psi_0\rangle = k|\psi_0\rangle \quad (6.76)$$

In tal caso si avrà ad ogni istante:

$$\begin{aligned}
 K | \psi(t) \rangle &= K \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0) \right] | \psi_0 \rangle \\
 &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0) \right] K | \psi_0 \rangle \\
 &= k \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0) \right] | \psi_0 \rangle \\
 &= k | \psi(t) \rangle
 \end{aligned}$$

Questa relazione prova che il sistema si trova ad ogni istante in un autostato di K con lo stesso autovalore iniziale. Possiamo allora affermare che:

- Se l'autovalore k è semplice lo stato $| \psi(t) \rangle$ non può essere distinto da $| \psi_0 \rangle$ e pertanto il sistema rimane sempre nello stesso stato in cui si trovava inizialmente.
- Se l'autovalore k è invece degenere non è detto che lo stato $| \psi(t) \rangle$ coincida con lo stato iniziale $| \psi_0 \rangle$: l'unica cosa che si può dire è che lo stato del sistema si trova sempre nel sottospazio degli autovettori di K appartenenti all'autovalore k .

6.3.3 Invarianza rispetto alle traslazioni di spazio

Consideriamo un sistema il cui Hamiltoniano H (supposto sempre indipendente dal tempo), sia invariante rispetto alle traslazioni di spazio lungo una direzione fissata $\hat{\mathbf{n}}$. Come già sappiamo, condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che H commuti con la componente P_n dell'impulso lungo la direzione \mathbf{n} :

$$[H, P_n] = 0 \quad (6.77)$$

Ma questa, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, è proprio la condizione che garantisce l'invarianza nel tempo del valor medio di P_n .

Abbiamo così mostrato che:

Se l'Hamiltoniano H del sistema è invariante rispetto alle traslazioni nella direzione \mathbf{n} , allora la componente P_n dell'impulso del sistema in quella direzione è una costante del moto:

$$\langle P_n \rangle_t = \text{costante} \quad (6.78)$$

In particolare se il sistema si trova all'inizio in un autostato $| p'_n \rangle$ di P_n , allora esso resterà in quello stato ad ogni altro istante.

Se poi H è invariante rispetto a tutte le traslazioni spaziali, esso commuta con tutte le componenti dell'impulso:

$$[H, \mathbf{P}] = 0 \quad (6.79)$$

In tal caso si conserva il valor medio di ogni componente dell'impulso:

$$\text{med} \mathbf{P}_t = \text{costante} \quad (6.80)$$

6.3.4 Teorema di Ehrenfest

Consideriamo il sistema formato da una particella di massa m soggetta ad un potenziale V dipendente dalla posizione. L'Hamiltoniano di questo sistema si scrive dunque:

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{R}) \quad (6.81)$$

Scriviamo l'equazione del moto del valor medio della variabile X :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle X \rangle_t &= \langle [X, H] \rangle_t \\ &= \frac{1}{2m} \langle [X, P^2] \rangle_t + \langle [X, V(\mathbf{R})] \rangle_t \\ &= \frac{1}{2m} \langle [X, P_x^2] \rangle_t \end{aligned} \quad (6.82)$$

Usando la nota algebra dei commutatori si trova:

$$[X, P_x^2] = P_x [X, P_x] P_x + [X, P_x] P_x = 2i\hbar P_x \quad (6.83)$$

Sostituendo la 6.83 nella 6.82 otteniamo infine:

$$\frac{d}{dt} \langle X \rangle_t = \frac{\langle P_x \rangle_t}{m} \quad (6.84)$$

Risultati simili si ottengono per le altre due componenti dell'operatore posizione \mathbf{R} :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{R} \rangle_t = \frac{\langle \mathbf{P} \rangle_t}{m} \quad (6.85)$$

Più complicato è il calcolo del valor medio della variabile P_x :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle P_x \rangle_t &= \langle [P_x, H] \rangle_t \\ &= \langle [P_x, V(\mathbf{R})] \rangle_t \end{aligned} \quad (6.86)$$

Per il calcolo del termine a destra della 6.86 si utilizza la relazione riferita data in appendice:

$$[P_x, V(\mathbf{R})] = -i\hbar \frac{\partial V(\mathbf{R})}{\partial X} \quad (6.87)$$

Sostituendo quest'ultima nella relazione 6.86 otteniamo infine:

$$\frac{d}{dt} \langle P_x \rangle_t = - \left\langle \frac{\partial V(\mathbf{R})}{\partial X} \right\rangle_t \quad (6.88)$$

Gli analoghi risultati che si ottengono per le altre due componenti dell'operatore posizione \mathbf{P} si possono sintetizzare nell'unica equazione vettoriale:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle_t = - \langle \nabla V(\mathbf{R}) \rangle_t \quad (6.89)$$

Riscriviamo per comodità insieme le due equazioni 6.85 e 6.89:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{R} \rangle_t = \frac{\langle \mathbf{P} \rangle_t}{m} \quad (6.90)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle_t = \langle -\nabla V(\mathbf{R}) \rangle_t \quad (6.91)$$

Queste equazioni vanno sotto il nome di *Equazioni di Ehrenfest*.

Come si vede esse ricordano molto da vicino le equazioni del moto della Meccanica Classica per una particella soggetta ad un potenziale scalare. In particolare, derivando rispetto al tempo l'eq. 6.90 e sostituendovi l'eq.6.91 si ottiene una relazione formalmente molto simile alla classica equazione di Newton:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{R} \rangle_t &= \frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle_t \\ &= \langle -\nabla V(\mathbf{R}) \rangle_t \\ &\equiv \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}) \rangle_t \end{aligned} \quad (6.92)$$

dove nell'ultima linea abbiamo messo in evidenza che l'operatore vettoriale:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv -\nabla V(\mathbf{R}) \quad (6.93)$$

è riconducibile alla definizione classica della forza agente sulla particella.

Questo risultato si generalizza a tutti i sistemi per i quali si ha analogo classico, permettendo di enunciare l'importante

Teorema di Ehrenfest:

Per i sistemi con analogo classico le equazioni di evoluzione dei valori medi quantistici delle variabili dinamiche sono formalmente identiche alle Equazioni di Hamilton della Meccanica Classica purchè in queste ultime si sostituiscano alle funzioni classiche i valori medi delle rispettive grandezze quantistiche.

6.3.5 Approssimazione classica e teorema di Ehrenfest

Le equazioni di Ehrenfest sono soltanto formalmente simili ma non identiche alle equazioni del moto classiche. Basta infatti riflettere sul fatto che mentre nelle equazioni classiche sono coinvolti solo i valori *locali* delle variabili dinamiche, invece il calcolo dei valori medi quantistici coinvolge i valori di variabili dinamiche in *tutti i punti dello spazio*.

La similitudine tra queste equazioni sarebbe stata più stringente se in luogo della 6.92 avessimo ottenuto:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{R} \rangle_t = \nabla_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\langle \mathbf{R} \rangle_t} \quad (6.94)$$

ed in tal caso le equazioni del moto della Meccanica Classica avrebbero descritto bene il moto del baricentro della funzione d'onda della particella. Purtroppo la 6.94 può essere considerata una buona approssimazione della 6.92 solo quando la funzione d'onda del sistema soddisfa a determinate condizioni piuttosto restrittive.

In ogni caso quando l'equazione 6.94 si può considerare una buona approssimazione della 6.92 possiamo dire che la particella si trova nel limite classico della Meccanica Quantistica .

Questa situazione si incontra quando la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ è fortemente piccata attorno al punto $\bar{\mathbf{r}}(t) \equiv \langle \mathbf{R} \rangle_t$ ed il potenziale V risulta funzione assai regolare nella piccola regione dove la funzione d'onda è sostanzialmente diversa da zero. Tutto ciò è mostrato in figura.

In queste condizioni $|\psi|^2$ ha un massimo in prossimità di $\bar{\mathbf{r}}(t)$ e risulta ivi praticamente costante, inoltre al di fuori di quell'intervallo l'annullarsi della funzione d'onda rende sostanzialmente irrilevante il comportamento del potenziale. Possiamo allora eseguire la seguenti approssimazioni:

$$\begin{aligned} \langle F_x \rangle_t &= - \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x} \psi(\mathbf{r}, t) \\ &\approx - \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x} |_{\bar{\mathbf{r}}(t)} \int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &= \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x} |_{\bar{\mathbf{r}}(t)} \end{aligned} \quad (6.95)$$

che riconducono le equazioni di Ehrenfest alle equazioni del moto classiche. Bisogna però notare che la funzione d'onda nelle coordinate non deve essere troppo piccata perchè altrimenti, a causa delle relazioni di indeterminazione di Heisenberg, non si potrebbe attribuire alla particella un impulso abbastanza definito distruggendo così l'immagine classica del moto della particella.

6.4 La relazione di indeterminazione tempo-energia

Consideriamo un sistema retto da un Hamiltoniano H non dipendente esplicitamente dal tempo ed indichiamo con $|\psi(t)\rangle$ il suo stato al tempo t . Indichiamo con:

$$(\delta\mathcal{E})_\psi \equiv \left[\left\langle \left(\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle_\psi \right)^2 \right\rangle_\psi \right]^{1/2} \quad (6.96)$$

$$(\delta\mathcal{A})_\psi \equiv \left[\left\langle \left(\mathcal{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi \right)^2 \right\rangle_\psi \right]^{1/2} \quad (6.97)$$

le deviazioni standard in questo stato rispettivamente dell'energia e di una variabile dinamica A anch'essa non dipendente esplicitamente dal tempo. Applicando a queste espressioni la relazione indeterm otteniamo:

$$(\delta\mathcal{A})_\psi \cdot (\delta\mathcal{E})_\psi \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle_\psi \right| \quad (\text{indetermene})$$

Sostituendo a destra della indetermene l'equazione del moto sempl otteniamo:

$$(\delta\mathcal{A})_\psi \cdot (\delta\mathcal{E})_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d \langle A \rangle_\psi}{dt} \right| \quad (6.98)$$

che si può riscrivere al seguente modo:

$$\tau_A \cdot (\delta\mathcal{E})_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{taua})$$

dove abbiamo posto:

$$\tau_A \equiv \frac{(\delta\mathcal{A})_\psi}{d \langle \mathcal{A} \rangle_\psi / dt} \quad (6.99)$$

La grandezza τ_A rappresenta l'intervallo di tempo necessario affinché il centro della distribuzione delle misure di A si sposti di un tratto confrontabile con la deviazione standard della distribuzione al tempo t . In altri termini τ_A è il tempo caratteristico dell'evoluzione della variabile dinamica A cioè il tempo minimo oltre il quale la distribuzione delle misure di A si è profondamente modificata.

Ogni variabile dinamica ha il suo tempo caratteristico ed è lecito pertanto prendere in considerazione il più piccolo tempo caratteristico τ tra tutte le variabili dinamiche indipendenti definibili per il sistema fisico dato. Questo intervallo di tempo τ è il tempo caratteristico dell'evoluzione dello stato del sistema in quanto esso rappresenta il minimo tempo oltre il quale lo stato del sistema si è apprezzabilmente modificato rispetto ad almeno una variabile dinamica.

Poichè questo tempo τ deve soddisfare la taua, possiamo scrivere:

$$\tau \cdot (\delta\mathcal{E})_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{tau})$$

che è nota come *Relazione di Indeterminazione tempo-energia*:

Qualunque sia lo stato del sistema, il prodotto del tempo caratteristico della sua evoluzione per l'indeterminazione in energia non può mai essere inferiore alla costante di Planck.

La (τ) implica che una più rapida evoluzione dello stato del sistema (cioè un minor valore di τ) è sempre accompagnata da una maggiore imprecisione nelle misure di energia.

Detto in altro modo:

- uno stato che evolve rapidamente si deve necessariamente costruire sovrapponendo molti stati stazionari di energie diverse;
- al contrario, se il sistema si trova in uno stato stazionario si ha:

$$(\delta\mathcal{E})_\psi = 0 \quad (6.100)$$

ma le distribuzioni statistiche di tutte le variabili dinamiche sono statiche:

$$\frac{d \langle \mathcal{A} \rangle_\psi}{dt} = 0 \quad \forall \mathcal{A} \quad (6.101)$$

e quindi $\tau = \infty$

6.5 Lo schema di Schrödinger

La procedura per determinare l'evoluzione temporale dei sistemi quantistici descritta nei paragrafi precedenti costituisce uno schema che si articola nei seguenti punti:

1. Lo stato del sistema dinamico è rappresentato da un vettore variabile nel tempo dello spazio di Hilbert; tutti gli altri vettori di questo spazio sono immobili.
2. Le variabili dinamiche sono rappresentati da operatori lineari che non dipendono dal tempo. Fanno eccezione i casi in cui la variabile dinamica considerata ha una dipendenza esplicita prestabilita (non dipendente dalla dinamica del sistema) dal tempo.
3. Esiste una equazione del moto per i vettori che rappresentano gli stati del sistema ma non per gli operatori (che al più possono cambiare nel tempo in modo prestabilito).

4. Esiste una equazione di moto per il valor medio di una qualsiasi variabile dinamica perchè sono gli stati che variano nel tempo.

L'insieme di queste procedure viene indicato con il nome di *Schema di Schrödinger*.

Per indicare che gli oggetti simbolici con cui lavoriamo sono riferiti allo schema di Schrödinger useremo associare ad essi il pedice S : $|\psi_S\rangle$, $A_S \dots$

6.6 Lo schema di Heisenberg

Lo schema di Schrödinger non è l'unico possibile: si possono infatti ottenere infiniti schemi differenti assoggettando i vettori dello spazio di Hilbert all'azione di un qualsiasi operatore $\Omega(t)$ dipendente in un modo qualsiasi dal tempo. In queste condizioni, lo stato del sistema al tempo t , che nello schema di Schrödinger è rappresentato dal vettore $|\psi_S(t)\rangle$, viene ad essere rappresentato dal vettore:

$$|\psi_\Omega(t)\rangle \equiv \Omega(t) |\psi_S(t)\rangle \quad (6.102)$$

Naturalmente nel nuovo schema ogni variabile dinamica A del sistema sarà rappresentata da un operatore A_Ω in generale diverso dall'operatore A_S che la rappresenta nello schema di Schrödinger.

6.6.1 Equazione del moto per U

Deriviamo rispetto al tempo l'operatore di evoluzione temporale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t, t_0) &= \frac{U(t + \delta t, t_0) - U(t, t_0)}{\delta t} \\ &= \frac{1}{\delta t} (U(t + \delta t, t)U(t, t_0) - U(t, t_0)) \\ &= \frac{1}{\delta t} (U(t + \delta t, t) - I)U(t, t_0) \\ &= \frac{1}{\delta t} \left(I - \frac{i}{\hbar}H(t)\delta t - I \right)U(t, t_0) \\ &= \frac{1}{\delta t} \frac{1}{i\hbar}H(t)\delta t U(t, t_0) \end{aligned}$$

si ottiene così l'equazione del moto per U :

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = \frac{1}{i\hbar}H(t) U(t, t_0) \quad (6.103)$$

alla quale bisogna aggiungere naturalmente la condizione iniziale:

$$U(t_0, t_0) = I \quad (6.104)$$

Prendendo l'hermitiana coniugata della 6.103 si ottiene anche l'equazione del moto per U^\dagger :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U^\dagger(t, t_0) &= -\frac{1}{i\hbar}U^\dagger(t, t_0)H(t) \\ U^\dagger(t_0, t_0) &= I\end{aligned}\quad (6.105)$$

6.6.2 L'equazione di Heisenberg

Tra tutti, particolarmente interessante risulta il cosiddetto *Schema di Heisenberg* che consiste nelle seguenti prescrizioni.

Assogettiamo ogni vettore dello spazio degli stati del sistema quantistico all'azione dell'operatore $U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0)$. In questo modo viene a cambiare non solo la corrispondenza tra gli stati fisici ed i vettori di questo spazio ma anche la corrispondenza tra variabili dinamiche ed osservabili dello spazio di Hilbert. Precisamente, se indichiamo con $|\psi_s(t)\rangle$ il vettore associato allo stato dinamico $\{\psi(t)\}$ del sistema al tempo t , allora il vettore associato allo stesso stato nella rappresentazione di Heisenberg è indicato $|\psi_H\rangle$ ed è dato da:

$$|\psi_H(t)\rangle = U^\dagger(t, t_0)|\psi_s(t)\rangle \quad (6.106)$$

Si può vedere subito che questo vettore $|\psi_H\rangle$ non dipende dal tempo:

$$|\psi_H(t)\rangle \equiv |\psi_H\rangle \quad (6.107)$$

Infatti:

$$\begin{aligned}|\psi_H(t)\rangle &= U^\dagger(t, t_0)|\psi_s(t)\rangle \\ &= U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)|\psi_s(t_0)\rangle \\ &= |\psi_s(t_0)\rangle\end{aligned}\quad (6.108)$$

In altre parole il vettore della rappresentazione di Heisenberg corrispondente allo stato del sistema al tempo t è ad ogni istante uguale al vettore che descrive lo stato del sistema all'istante iniziale nella rappresentazione di Schrödinger.

Non ci resta che vedere adesso come si costruisce l'operatore $A_H(t)$ che rappresenta la variabile dinamica \mathcal{A} nella rappresentazione di Heisenberg quando sia noto l'analogo operatore A_S nella rappresentazione di Schrödinger.

A questo proposito osserviamo che, dovendo le due rappresentazioni fornire la stessa informazione fisica, bisogna imporre che i valori medi della variabile \mathcal{A} devono essere numericamente uguali in entrambe le rappresentazioni:

$$\langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle = \langle \psi_s(t) | A_S | \psi_s(t) \rangle \quad (6.109)$$

da cui

$$\langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle = \langle \psi_s(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A_S U(t, t_0) | \psi_s(t_0) \rangle \quad (6.110)$$

che in base alla (6.108) si può scrivere:

$$\langle \psi_s(t_0) | A_H | \psi_s(t_0) \rangle = \langle \psi_s(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A_s U(t, t_0) | \psi_s(t_0) \rangle \quad (6.111)$$

Questa equazione, dovendo valere per qualsiasi vettore in cui può trovarsi il sistema, implica l'eguaglianza tra operatori:

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A_s U(t, t_0) \quad (6.112)$$

Come si vede, nello schema di Heisenberg gli operatori, contrariamente ai vettori di stato, dipendono dal tempo. Esiste pertanto in questo schema una equazione del moto per gli operatori ma non per gli stati del sistema fisico. Per determinare questa equazione eseguiamo la derivata temporale dell'operatore $A_H(t)$ espresso dalla (6.112) ed applichiamo le (6.103) e (6.105)

$$\begin{aligned} \frac{dA_H(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} (U^\dagger A_s(t) U) \\ &= \frac{dU^\dagger}{dt} A_s(t) U + U^\dagger A_s \frac{dU}{dt} + U^\dagger \frac{\partial A_s}{\partial t} U \\ &= \frac{1}{i\hbar} (-U^\dagger H A_s U + U^\dagger A_s H U) + U^\dagger \frac{\partial A_s(t)}{\partial t} U \\ &= \frac{1}{i\hbar} U^\dagger (A_s H - H A_s) U + U^\dagger \frac{\partial A_s(t)}{\partial t} U \\ &= \frac{1}{i\hbar} [A_s(t), H]_H + \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.113)$$

Abbiamo così ottenuto *l'Equazione di Heisenberg* cioè l'equazione del moto per gli operatori nello schema di Heisenberg:

$$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_s(t), H]_H + i\hbar \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} \quad (6.114)$$

Osserviamo ora che si ha in generale:

$$\begin{aligned} (A_s B_s)_H &= U^\dagger A_s B_s U \\ &= U^\dagger A_s U U^\dagger B U \\ &= A_H B_H \end{aligned} \quad (6.115)$$

Utilizzando la (6.115) l'eq. (6.114) si può mettere sotto la forma:

$$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H_H] + i\hbar \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} \quad (6.116)$$

L'equazione (6.116) unitamente alla condizione iniziale

$$A_H(t_0) = A_s(t_0) \quad (6.117)$$

determina nello schema di Heisenberg l'evoluzione temporale (la dinamica) del sistema fisico per mezzo delle variazioni temporali delle osservabili ad esso associate.

Nel caso in cui l'osservabile A non dipende esplicitamente dal tempo, l'Equazione di Heisenberg (6.116) prende la forma piú semplice

$$i\hbar \frac{dA(t)}{dt} = [A(t), H] \quad (6.118)$$

dove si é notato che $H_H \equiv H$ quando H non dipende dal tempo e si é inoltre tolto l'indice H, bastando la sola presenza dell'indice temporale a rendere chiaro che le quantità nella (6.118) sono definite nello schema di Heisenberg .

6.6.3 Osservazione 1

Nella rappresentazione di Heisenberg ogni ket immobile rappresenta un possibile moto quantistico del sistema, mentre le diverse variabili dinamiche sono rappresentate da operatori che evolvono nel tempo secondo l'equazione di Heisenberg (6.116)

Per quanto la (6.116) abbia lo stesso contenuto fisico dell'Equazione di Schrödinger , tuttavia certe proprietà formali generali dei sistemi quantici diventano piú trasparenti nella rappresentazione di Heisenberg . É questo il caso delle relazioni di simmetria e delle leggi di conservazione. Inoltre nella rappresentazione di Heisenberg risulta evidente la analogia formale tra Meccanica Quantistica e la formulazione hamiltoniana della Meccanica Classica . Ciò é dovuto al fatto che nella rappresentazione di Heisenberg , come nella Meccanica Classica , l'evoluzione del sistema é contenuta nella dipendenza temporale delle variabili dinamiche.

6.6.4 Osservazione 2

Nello schema di Heisenberg è molto semplice ritrovare l'equazione del moto di una qualsiasi variabile dinamica \mathcal{A} . Basta infatti notare che:

i - il valor medio di \mathcal{A} non può dipendere dallo schema che noi usiamo per il suo calcolo:

$$\langle A \rangle_t \equiv \langle \psi(t) | A_S | \psi(t) \rangle \equiv \langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle \quad (6.119)$$

ii - il vettore $|\psi_H\rangle$ non dipende dal tempo e quindi:

$$\langle \psi_H | \frac{dA_H}{dt} | \psi_H \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi_H | A_H | \psi_H \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathcal{A} \rangle_t \quad (6.120)$$

A questo punto basta applicare l'eq. (6.114) a destra su $|\psi_H\rangle$ e a sinistra su $\langle\psi_H|$ per ottenere l'equazione (6.61) dei valori medi.

6.6.5 Costanti del moto nello schema di Heisenberg

Lo schema di Heisenberg si presta bene per descrivere il ruolo delle costanti del moto in Meccanica Quantistica .

Abbiamo già definito una costante del moto come una variabile dinamica A il cui valor medio non cambia nel corso del tempo:

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{A}\rangle_t = 0 \quad (6.121)$$

L'equazione (6.120) mostra allora che

Una variabile dinamica \mathcal{A} , non dipendente esplicitamente dal tempo, è una *costante del moto* se la sua rappresentazione $A_H(t)$ nello schema di Heisenberg non dipende dal tempo:

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad A_H(t) = A_H \quad (6.122)$$

Dalle equazioni del moto (6.118) si vede che l'osservabile A deve commutare con l'hamiltoniano H :

$$[A_H, H] = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [A, H]_S = 0 \quad (6.123)$$

Le costanti del moto sono perciò rappresentate da osservabili che commutano con l'hamiltoniano del sistema (e ciò è vero sia nello schema di Heisenberg e sia nello schema di Schrödinger) .

6.7 Teorema di Ehrenfest

Mostreremo adesso che, se un sistema quantico possiede un'analogo classico, allora l'Equazione di Heisenberg da luogo ad equazioni che sono formalmente simili alle equazioni di Hamilton della Meccanica Classica .

I sistemi che hanno analogo classico sono quei sistemi per i quali l'Hamiltoniano H_Q quantistico ha la stessa forma funzionale della funzione Hamiltoniana classica H_C :

$$H = H(q_i, p_j) \quad (6.124)$$

dove q_i e p_j sono gli operatori di posizione e di impulso nella rappresentazione di Schrödinger che soddisfano alle relazioni di commutazione rif.

Queste relazioni di commutazione restano valide anche nello schema di Heisenberg .

Infatti, posto

$$q_i(t) = U^\dagger q_i U \quad p_j(t) = U^\dagger p_j U$$

utilizzando la (6.115) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 [q_i(t), p_j(t)]_H &= U^\dagger [q_i, p_j]_S U \\
 &= U^\dagger [q_i, p_j]_S U \\
 &= U^\dagger i\hbar \delta_{ij} U \\
 &= i\hbar \delta_{ij}
 \end{aligned} \tag{6.125}$$

Simili risultati valgono per le altre relazioni di commutazione che riassumiamo:

$$\begin{aligned}
 [q_i(t), p_j(t)]_H &= i\hbar \delta_{ij} \\
 [q_i(t), q_j(t)]_H &= 0 \\
 [p_i(t), p_j(t)]_H &= 0
 \end{aligned} \tag{6.126}$$

Per i sistemi aventi analogo classico la piú generale delle osservabili nello schema di Schrödinger é una funzione delle coordinate e degli impulsi:

$$A = A(q_1, q_2 \dots, p_1, p_2 \dots) \tag{6.127}$$

Per osservabili di questo tipo si possono calcolare facilmente i commutatori $[q_i, A]$ e $[p_i, A]$ facendo uso delle seguenti identitá che per comoditá sono dedotte in Appendice :

$$[q_i, A] = i\hbar \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad [p_i, A] = -i\hbar \frac{\partial A}{\partial q_i} \tag{6.128}$$

Utilizzando la (6.115) si mostra facilmente che le stesse relazioni valgono anche nello schema di Heisenberg :

$$[q_i(t), A_H] = i\hbar \frac{\partial A_H}{\partial p_i} \quad [p_i(t), A_H] = -i\hbar \frac{\partial A_H}{\partial q_i} \tag{6.129}$$

Applicando queste relazioni alle equazioni di Heisenberg per l'operatore impulso otteniamo:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{dp_i(t)}{dt} &= [p_i(t)_H, H] \\
 &= -i\hbar \frac{\partial H_H}{\partial q_i}
 \end{aligned} \tag{6.130}$$

Otteniamo cosí l'equazione:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{6.131}$$

dove é stato ommesso l'ormai inutile indice indicativo dello schema di Heisenberg. Con lo stesso procedimento si dimostra l'equazione analoga per le coordinate:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{6.132}$$

Le (6.131) ed (6.132) sono, come si vede, formalmente analoghe alle equazioni di Hamilton della Meccanica Classica . È degno di nota il fatto che l' Equazione di Heisenberg (6.116) per una variabile dinamica \mathcal{A} sono formalmente identiche alle equazioni di Liouville della Meccanica Classica :

$$\frac{dA_{cl}}{dt} = \{A_{cl}, H_{cl}\} + \frac{\partial A_{cl}}{\partial t} \quad (6.133)$$

laddove si faccia corrispondere la parentesi di Poisson classica al commutatore quantistico:

$$\{ \dots \} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\dots] \quad (6.134)$$

Del resto questa analogia diviene tanto piú notevole appena si osserva che entrambi gli algoritmi godono di identiche proprietà algebriche. Queste proprietà sono riassunte piú sotto.

6.7.1 Algebra dei commutatori