Determinismo classico

October 29, 2002

1 Introduzione

Sia dato un sistema fisico ad f gradi di libertà; è allora possibile assegnare f coordinate generalizzate $q_1, q_2, ...q_f$ che definiscono univocamente la posizione del sistema nello spazio. La concezione classica assume che, in linea di principio, queste coordinate possano essere determinate con certezza a meno degli errori dovuti agli apparati sperimentali. L'insieme delle f coordinate generalizzate e delle corrispondenti f velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_f$, anch'esse determinabili con certezza, definiscono lo **stato** del sistema dal punto di vista della meccanica classica.

Come stato intendiamo, in generale, la massima informazione fisica sul sistema ad un istante di tempo t fissato e come determinismo classico la capacità di prevedere - in base alle leggi classiche del moto - lo stato del sistema ad un qualunque istante di tempo successivo, con certezza assoluta. Ciò presuppone di conoscere i fattori che determinano l'evoluzione temporale del sistema stesso, cioè le forze, i vincoli ecc. Questi fattori si riassumono nella cosiddetta Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ ($q \equiv (q_1, q_2, ..q_f)$ e $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_f)$).

Nel formalismo lagrangiano le leggi del moto prendono il nome di equazioni di Lagrange e sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \qquad (i = 1, f). \tag{1}$$

Dal punto di vista matematico le equazioni di Lagrange formano un sistema di f equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine, che possono essere integrate una volta date 2f condizioni al contorno. Dal punto di vista fisico le condizioni al contorno sono le 2f coordinate e velocità generalizzate che all'istante t_0, definiscono lo stato del sistema e la soluzione è costituita dalle 2f coordinate e velocità generalizzate all'istante successivo t, che formano lo stato all'istante t. Questo è il carattere deterministico della meccanica classica: noto con certezza lo stato del sistema ad un determinato istante è possibile prevederne con certezza lo stato ad un qualunque altro istante di tempo.

2 Formalismo Hamiltoniano

Il formalismo Hamiltoniano è una riscrittura delle leggi del moto equivalente al formalismo lagrangiano, ma presenta dei vantaggi. Primo permette di approfondire gli aspetti teorici della meccanica classica; secondo, la meccanica quantistica (non relativistica) ne rappresenta la sua estensione per lo studio dei fenomeni su scala microscopica. Quindi la relazione tra le due teorie ed il limite classico della meccanica quantistica devonoessere discussi nell'ambito hamiltoniano.

La differenza principale dal formalismo lagrangiano sta nel fatto che ora lo stato viene definito sempre da f coordinate generalizzate q_i ma le f velocità generalizzate vengono sostituite dagli f impulsi generalizzati p_i. Il passaggio tra i due set di variabili viene effettuato da una trasformata di Lagrange sulla Lagrangiana. Consideriamo il differenziale totale di $\mathcal{L}$

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt + \sum(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i). \tag{2}$$

Definiamo impulso generalizzato p_i

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \tag{3}$$

Applicando l'identità $p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$ e le equazioni di Lagrange, l'equazione precedente si può scrivere

$$d(\sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt + \sum(-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i). \tag{4}$$

La grandezza al primo membro, espressa in termini di coordinate ed impulsi generalizzati, prende il nome di Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(p, q; t) = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \tag{5}$$

Dall'Eq.(4) risulta che $\mathcal{H}$ è un differenziale esatto per cui possiamo scrivere

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \tag{6}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{8}$$

Queste equazioni prendono il nome di equazioni canoniche o equazioni di Hamilton e costituiscono un sistema di 2f equazioni differenziali del primo ordine la cui integrazione richiede, come nel caso lagrangiano, 2f condizioni al contorno. Ancora una volta queste ultime vengono fissate dalla conoscenza di 2f parametri che ora sono coordinate ed impulsi generalizzati ad un dato istante di tempo. Quindi lo stato del sistema nel formalismo hamiltoniano è dato in termini nelle p_i e q_i.

A differenza delle velocità generalizzate, nel formalismo hamiltoniano gli impulsi devono essere considerati variabili indipendenti dalle coordinate. Infatti qui essi hanno un significato fisico che va al di là della definizione usuale $p_i = m\dot{q}_i$ come vedremo discutendo delle trasformazioni canoniche. Il carattere degli impulsi come variabili indipendenti dalle coordinate è anche alla base della derivazione delle equazioni di Hamilton da un principio variazionale in uno spazio a 2f dimensioni, detto **spazio delle fasi**, in cui le traiettorie sono espresse in termini di coordinate ed impulsi generalizzati:

$$q_i = q_i(t) \tag{9}$$

$$p_i = p_i(t) \tag{10}$$

Esprimiamo prima l'azione classica in termini della Hamiltoniana $\mathcal{H}(p,q;t)$. Fissati lo stato iniziale (p^1,q^1) e lo stato finale (p^2,q^2), si ha

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt = \int_1^2 [\sum(p_i \dot{q}_i) - \mathcal{H}(p,q;t)]dt \qquad (11)$$

Secondo il principio di minima azione, l'azione $\mathcal{S}$, funzione di tutte le possibili traiettorie che collegano stato iniziale e finale nello spazio delle fasi, è minima lungo la traiettoria reale. La condizione $\delta S = 0$ darà le equazioni del moto. Effettuando le variazioni di coordinate ed impulsi, si ha

$$\delta\mathcal{S} = \int_1^2 \sum(p_i\delta\dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i) - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \qquad (12)$$

Applichiamo l'identità $p_i\delta\dot{q}_i = p_i\frac{d}{dt}\delta q_i = \frac{d}{dt}(p_i\delta q_i) - \delta q_i \dot{p}_i$ e integriamo il primo termine. Poichè gli estremi d'integrazione sono fissati, allora $\delta q^1 = \delta q^2 = 0$ e quest'ultimo integrale è nullo. Ne segue

$$\delta\mathcal{S} = \int \sum \delta q_i(-\dot{p}_i - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}) + \delta p_i(\dot{q}_i - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}) = 0 \qquad (13)$$

Poichè l'integrale dev'essere nullo per variazioni arbitrarie di coordinate δq ed impulsi δp allora i termini in parentesi nell'integrando devono essere nulli, quindi seguono le equazioni di Hamilton, Eq.(6,7). E' facile verificare che integrali d'azione che differiscono per la derivata totale rispetto al tempo di una funzione arbitraria delle coordinate, degli impulsi e del tempo sono equivalenti, cioè danno le stesse equazioni del moto. La dimostrazione segue subito integrando nell'integrale d'azione la derivata totale. L'integrale che ne segue è funzione solo degli estremi della traiettoria e la sua variazione è nulla essendo gli estremi $p_i^{1,2}$ e $q_i^{1,2}$ fissi. Questa proprietà è essenziale per lo studio delle trasformazioni canoniche.

3 Lagrangiane ed Hamiltoniane di sistemi semplici

Stabilite le equazioni del moto, il problema è quello di trovare per ogni sistema fisico la sua Hamiltoniana. Nel caso di una particella libera applicando le simmetrie dello spazio-tempo ed il principio di relatività possiamo ricavare la forma della Lagrangiana (vedi anche Landau-Lifshitz, Meccanica). Dalla omeogeneità dello spazio (nessun punto privilegiato), dalla uniformità del tempo (nessun istante privilegiato) e dalla isotropia dello spazio (nessuna direzione privilegiata) segue che per una particella libera $\mathcal{L}$ può dipendere solo dal quadrato della velocità. Inoltre il principio di relatività impone che le equazioni del moto siano invarianti in forma in riferimenti inerziali diversi, quindi Lagrangiane appartenenti a riferimenti inerziali diversi devono coincidere a meno della derivata totale rispetto al tempo di una funzione delle coordinate, degli impulsi e del tempo, come spiegato nel paragrafo precedente.

Siano due riferimenti O ed O' che si muovono con velocità relativa $\overrightarrow{v}_0$ (per semplicità imponiamo $v_0^2 \ll v_0$) e siano $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_0}$ le velocità della particella nei due riferimenti. Sviluppando in serie al primo ordine

$$\mathcal{L}'_{O'} = \mathcal{L}_O((\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_0})^2) = \mathcal{L}_O(v^2) + (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v^2})_{O=O'} 2\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v_0}. \qquad (14)$$

Il termine $\vec{v} \cdot \vec{v_0}$ é già la derivata totale rispetto al tempo di $\vec{r} \cdot \vec{v_0}$, quindi il coefficiente deve essere una costante, cioè

$$(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^2})_{O=O'} = cost \tag{15}$$

Integrando si ha

$$\mathcal{L} = cost \cdot v^2 \tag{16}$$

Identificando la costante con $\frac{1}{2}m$ si trova che la lagrangiana coincide con l'energia cinetica, e applicando l'Eq.(5) anche l'Hamiltoniana coincide con l'energia cinetica espressa in termini dell'impulso,cioè $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}$. Consideriamo ora un sistema di due particelle libere non interagenti. Il moto della prima particella non è influenzato dal moto della seconda e viceversa, quindi le equazioni di Hamilton della prima particella devono essere disaccoppiate da quelle della seconda; affinchè ciò possa avvenire l'Hamiltoniana totale dev'essere la somma delle Hamiltoniane di ciascuna particella, cioè

$$H(p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} \quad + \quad \frac{p_2^2}{2m_2} \tag{17}$$

Se le due particelle sono interagenti, l'interazione verrà espressa da un termine aggiuntivo $\mathcal{V}$, che accoppia il moto delle due particelle. In linea di principio $\mathcal{V}$ potrebbe dipendere da coordinata ed impulso della prima particella e da coordinata ed impulso della seconda particella ed anche dal tempo.

Analizziamo prima la dipendenza dal tempo. Questa potrebbe venire solo da un campo esterno, ma noi stiamo considerando le due particelle interagenti isolate dal resto del mondo e quindi una eventuale dipendenza dal tempo violerebbe l'uniformità del tempo. Ciò porta ad una interazione istantanea che d'altra parte è in conflitto con la relatività. Infatti interazione significa scambio di informazione tra le due particelle sulle rispettive traiettorie istantanee nello spazio delle fasi. Questa scambio richiede un tempo associato alla velocità **finita** di trasmissione della informazione che al più può essere pari alla velocità della luce. In base alle attuali vedute l'interazione avviene per il tramite dello scambio di particelle (fotoni per l'interazione elettromagnetica, mesoni per l'interazione nucleare, ecc.) che viaggiano a velocità minori o uguali alla velocità della luce in accordo con la relatività. Per le scale temporali della meccanica classica possiamo assumere l'interazione come istantanea.

Una eventuale dipendenza dagli impulsi violerebbe il principio di relatività di Galileo (le leggi della fisica sono invarianti in forma per tutti gli osservatori inerziali), in quanto l'interazione, dipendendo dall'impulso, sarebbe diversa in riferimenti inerziali diversi.

Concludendo l'interazione può solo dipendere dalle coordinate delle due particelle, ma per la omogeneitá dello spazio dev'essere invariante per traslazione e quindi può solo dipendere dalla differenza $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e per l'isotropia dello spazio dev'essere invariante per rotazione e quindi dipendere dal modulo della distanza $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ In definitiva abbiamo

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \mathcal{V}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tag{18}$$

4 Simmetrie dello spazio-tempo e teoremi di conservazione

Le restrizioni imposte alla Hamiltoniana dalle simmetrie dello spazio- tempo hanno importante conseguenze sulla proprietà dinamiche di un sistema fisico. Vediamole intanto per il caso di due particelle interagenti ma le conclusioni hanno validità generale. Deriviamo rispetto al tempo l'Hamiltoniana, assumendo per il momento una dipendenza esplicita dal tempo. Applicando le equazioni del moto si

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\dot{q}_i) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \tag{19}$$

Il termine in parentesi si elide dopo aver applicato le equazioni di Hamilton. Se poi l'Hamiltoniana è esplicitamente indipendente dal tempo, anche la la derivata parziale si annulla e $\mathcal{H}$ é una costante del moto. In altri termini, se ad un istante di tempo t_0 $\mathcal{H}(q(t_0), p(t_0)) = E$ nei tempi successivi, pur cambiando coordinate ed impulsi, si ha ancora $\mathcal{H}(q(t), p(t)) = E$.

Consideriamo ora l'impulso totale delle due particelle, cioè $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ di cui studiamo la derivata temporale

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt}\vec{p}_1 + \frac{d}{dt}\vec{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_2} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_1} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_2} = 0 \tag{20}$$

essendo le due derivate del potenziale rispetto alle coordinate uguali ed opposte per la dipendenza da $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Quindi l'invarianza del potenziale per traslazioni implica la conservazione dell'impulso totale. Come terzo caso esaminiamo come varia nel tempo il momento angolare totale

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2 = \tag{21}$$

$$= \frac{\vec{p}_1}{m} \times \vec{p}_1 - \vec{r}_1 \times \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{p}_2}{m} \times \vec{p}_2 - \vec{r}_2 \times \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2} = \tag{22}$$

$$= -\frac{dV}{dr}\hat{r} \times (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = 0, \tag{23}$$

dove $\hat{r}$ è il versore della distanza tra le due particelle. Questo risultato segue dal fatto che il potenziale è funzione del modulo della distanza tra le due particelle, quindi segue dalla invarianza del potenziale per rotazione. Le relazioni tra simmetrie dello spazio tempo e teoremi di conservazione di variabili dinamiche saranno riprese in un contesto più generale nel prossimo paragrafo.

5 Trasformazioni canoniche

Una trasformazione che lascia invariate le equazioni del moto di Hamilton si chiama canonica. Poichè nel formalismo hamiltoniano coordinate ed impulsi sono variabili indipendenti, la trasformazione canonica più generale sarà della forma

$$Q_i = Q_i(q_1, ...q_f.p_1, ...p_f; t) \tag{24}$$

$$P_i = P_i(q_1, ...q_f.p_1, ...p_f; t) \tag{25}$$

La condizione perchè una trasformazione sia canonica si può ricercare imponendo che il principio d'azione per le (q,p) sia equivalente al principio d'azione per le (Q,P), il che accade quando i due integrali d'azione differiscono al piú della derivata totale rispetto al tempo di una funzione arbitraria F delle coordinate, degli impulsi e del tempo ,cioè

$$\Sigma p_i dq_i - \mathcal{H} dt = \Sigma P_i dQ_i - \tilde{\mathcal{H}} dt + dF \tag{26}$$

dove $\tilde{\mathcal{H}}$ è la Hamiltoniana espressa in termini delle nuove variabili.

Supponiamo che la funzione arbitraria sia espressa in termini delle vecchie e nuove coordinate (ma altre scelte sono possibili), allora si ha

$$\Sigma p_i dq_i - \mathcal{H} dt = \Sigma P_i dQ_i - \tilde{\mathcal{H}} dt + \Sigma(\frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i) + \frac{\partial F}{\partial t} dt \tag{27}$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = p_i \quad ; \quad \frac{\partial F}{dQ_i} = -P_i \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \tag{28}$$

Le prime due equazioni formano un sistema di 2f equazioni accoppiate che danno la trasformazione canonica tra le vecchie e nuove coordinate, una volta fissata la funzione F. Quest'ultima prende il nome di generatrice della trasformazione canonica.

La funzione generatrice può esprimersi anche in funzione delle vecchie coordinate ed i nuovi impulsi, cioè $F(q, P, t)$. In questo caso, applicando l'identità $P_i dQ_i = d(P_i Q_i) - Q_i dP_i$ dalla condizione di equivalenza segue

$$\Sigma p_i dq_i - \mathcal{H} dt = -\Sigma Q_i dP_i - \tilde{\mathcal{H}} dt + \Sigma(\frac{\partial F'}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F'}{dP_i} dP_i) + \frac{\partial F'}{\partial t} dt \tag{29}$$

dove il differenziale $d(P_i Q_i)$ è stato incorporato nella funzione generatrice $F' = F + \Sigma P_i Q_i$. Le nuove condizioni sono

$$\frac{\partial F'}{\partial q_i} = p_i \quad ; \quad \frac{\partial F'}{dP_i} = Q_i \quad ; \quad \frac{\partial F'}{\partial t} = \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{H} \tag{30}$$

La classe delle trasformazioni canoniche deve contenere la trasformazione identità, cioè quella per $Q_i = q_i$ e $P_i = p_i$. Qual'è il suo generatore? Imponiamo queste due condizioni sulle equazioni Eq.(30)

$$\frac{\partial F'}{\partial q_i} = p_i = P_i \tag{31}$$

$$\frac{\partial F'}{dP_i} = Q_i = q_i; \tag{32}$$

ed integriamo rispetto alle variabili q e P di cui F' è funzione. Si ottiene subito

$$F' = \Sigma q_i P_i \tag{33}$$

Partendo dalla trasformazione identità si può costruire una trasformazione canonica infinitesima. Questa ultima, mantenendo tutte le proprietà della corrispondente trasformazione canonica finita, è tuttavia più facile da trattare. Fissiamo un parametro di piccolezza ε, ($\varepsilon^2 \ll \varepsilon$) che di volta in volta assumerà significato fisico diverso. Data una funzione arbitraria qualunque $G(q, P, t)$, anch'essa da fissare opportunamente, una trasformazione canonica infinitesima assume la forma

$$F' = \Sigma q_i P_i + \varepsilon G(q, P, t) \tag{34}$$

G prende il nome di generatore della trasformazione canonica infinitesima. Applicando le Eq.(30) si ottiene in temini di G la trasformazione canonica infinitesima

$$Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{35}$$

$$P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{36}$$

Dimostreremo nel seguito che trasformazioni di simmetria quali traslazioni spaziali, temporali e rotazioni spaziali fanno parte della classe delle trasformazioni canoniche. Il chè non sorprende poichè, per sistemi le cui simmetrie spazio temporali (omogeneità e isotroipa dello spazio ed uniformità del tempo) non sono violate, queste trasformazioni devono lasciare invarianti in forma le equazioni del moto.

- **traslazioni temporali**: $\varepsilon = dt$ (tempo infinitesimo), G=H (Hamiltoniana) Applicando

  le Eq.(35) e (36) e poi le equazioni del moto, segue

  $$Q_i(t) = q_i(t) + dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = q_i(t) + \dot{q}_i dt = q_i(t + dt) \tag{37}$$

  $$P_i(t) = p_i(t) + dt \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = p_i(t) + \dot{p}_i dt = p_i(t + dt). \tag{38}$$

  La trasformazione canonica generata dalla Hamiltoniana sposta coordinate ed impulsi dal tempo t al tempo t+dt, quindi è una traslazione temporale. Da questo punto di vista l'evoluzione dinamica di un sistema appare come una successione di traslazioni temporali infinitesime, concetto che ritroveremo in meccanica quantistica.

- **traslazioni spaziali**: $\varepsilon G = \delta \vec{r} \cdot \vec{P} (\delta \vec{r}$ (traslazione rigida), $\vec{P} = \Sigma \vec{p}_i$ (impulso totale))

  Applicando le eq.(35) e (36) segue

  $$X_i = x_i + \frac{\partial}{\partial p_i^x} (\delta \vec{r} \cdot \vec{P}) = x_i + \delta x \tag{39}$$

  $$P_i^x = p_i^x + \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \vec{r} \cdot \vec{P}) = p_i^x \tag{40}$$

  Analoghe equazioni lungo gli assi y e z. La trasformazione canonica generata dall'impulso totale del sistema corrisponde quindi ad una traslazione spaziale rigida, che trasla le posizioni di tutte le particelle di $\delta \vec{r}$, ma non ne modifica gli impulsi. Conviene precisare che il generatore della traslazione infinitesima $\delta \vec{r}$ è la proiezione dell'impulso totale nella stessa direzione di $\delta \vec{r}$.

- **rotazioni**: $\varepsilon G = \delta\phi \cdot L$ ($\delta\phi = \delta\phi\hat{z}$(rotazione attorno all'asse z per fissare le idee) e $\vec{L} = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{p}_i$(momento angolare totale) Applicando le Eq.(35) e (36) si ha

$$X_i = x_i + \delta\phi \frac{\partial}{\partial p_i^x} \Sigma(\vec{r}_j \times \vec{p}_j)_z = x_i - \delta\phi \; y_i \tag{41}$$

$$Y_i = y_i + \delta\phi \frac{\partial}{\partial p_i^y} \Sigma(\vec{r}_j \times \vec{p}_j)_z = y_i + \delta\phi \; x_i \tag{42}$$

$$Z_i = z_i \tag{43}$$

Osserviamo che $\vec{L}$ ha la direzione dell'asse z nel caso specifico. L'impulso si trasforma allo stesso modo. Riconosciamo nelle trasformazione di un vettore secondo le Eq.(40)-(42) una rotazione rigida attorno all'asse z. Questo risultato si può generalizzare al caso di una rotazione attorno ad un qualunque asse. Concludiamo che la rotazione infinitesima attorno ad un asse, diciamo $\hat{u}$, è descritta da una trasformazione canonica generata dalla proiezione del momento angolare totale lungo quell'asse.

6 Trasformazioni canoniche e simmetrie dello spazio-tempo

Cerchiamo la condizione di invarianza della Hamiltoniana per una generica trasformazione canonica infinitesima generata da G. Dalle Eq.(35) e (36) segue

$$\delta\mathcal{H} = \mathcal{H}(q+\delta q, p+\delta p) - \mathcal{H}(q,p) = \Sigma(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\delta q_i) \tag{44}$$

$$= \varepsilon\Sigma(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}) \tag{45}$$

$$\equiv \varepsilon\{G, \mathcal{H}\} \tag{46}$$

dove $\delta p_i = P_i - p_i$ e $\delta q_i = Q_i - q_i$. L'ultima uguaglianza definisce la cosiddetta parentesi di Poisson tra due variabili dinamiche. Quindi la trasformazione canonica lascia invariata la Hamiltoniana se la parentesi di Poisson tra la Hamiltoniana stessa e il generatore G della trasformazione si annulla, cioè

$$\{G, \mathcal{H}\} = 0 \tag{47}$$

D'altra parte, posto che G sia indipendente esplicitamente dal tempo, si consideri come G varia nel tempo

$$\frac{dG}{dt} = \Sigma(\frac{\partial G}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\dot{p}_i) = \Sigma(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}) \tag{48}$$

$$= -\{G, \mathcal{H}\} \tag{49}$$

Affinchè G sia una costante del moto la parentesi di Poisson tra G ed $\mathcal{H}$ si deve annullare, ma questa è la stessa condizione perchè $\mathcal{H}$ sia invariante per la trasformazione canonica di cui G è il generatore. Nel caso delle trasformazioni di simmetria dello spazio-tempo, il generatore G è, come abbiamo visto, una variabile dinamica (Hamiltoniana, impulso totale, momento angolare totale). Quindi se $\mathcal{H}$ è invariante per la trasformazione di simmetria generata dalla variabile dinamica G, allora G stesso è una costante del moto. Per esempio, se $\mathcal{H}$ è invariante per traslazione allora $\{\vec{P}, \mathcal{H}\} = 0$, in accordo con l'Eq.(46), l'impulso totale è una costante del moto. Lo stesso dicasi per Hamiltoniana e momento angolare totale. Ritroviamo così nel caso generale le relazioni tra simmetrie e teoremi di conservazione studiate nel caso di due particelle interagenti. Teoremi di conservazione di variabili dinamiche appaiono quindi come manifestazione delle simmetrie dello spazio-tempo. Poichè la meccanica quantistica non mette in discussione le simmetrie dello spazio-tempo ci aspettiamo che relazioni simili sussistano anche in meccanica quantistica. Vedremo che questo è il caso.