

## Capitolo 10

# PROBLEMA A DUE CORPI: STATI DEL CONTINUO

Riprendiamo l'equazione di Schrödinger per il sistema di due particelle interagenti con l'intento di cercare la classe di soluzioni che descrivono stati di diffusione. In questo caso si deve avere  $E > 0$ , affinché la probabilità di trovare le particelle lontano dalla regione d'interazione sia finita.

Consideriamo direttamente l'equazione di Schrödinger per il moto relativo

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})\right]|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (10.1)$$

Asintoticamente il potenziale si annulla e  $|\psi\rangle \equiv |\vec{p}\rangle$  diventa la funzione d'onda di una particella libera di impulso  $p = \sqrt{2mE}$ . Riscriviamo l'equazione di Schrödinger mettendo in evidenza esplicitamente la soluzione asintotica

$$\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)(|\psi\rangle - |\vec{p}\rangle) = \mathbf{V}|\psi\rangle, \quad (10.2)$$

essendo  $\left(E - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)|\vec{p}\rangle = 0$ . Allora possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = |\vec{p}\rangle + \frac{1}{E \pm - \mathbf{p}^2/2m} \mathbf{V}|\psi\rangle \quad (10.3)$$

L'introduzione dell'operatore inverso richiede una precauzione: per evitare singolarità nel dominio reale abbiamo introdotto in  $E^\pm = E \pm i\epsilon$  una quantità immaginaria infinitesima, che alla fine degli sviluppi va posta uguale a zero. Il doppio segno corrisponde, come vedremo, alla scelta di condizioni fisiche al contorno diverse.

L'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda si scrive infine

$$\langle \vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle + \int d^3 \vec{r}' \langle \vec{r} | \frac{1}{E^\pm - \mathbf{p}^2/2m} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \mathbf{V} | \psi \rangle \quad (10.4)$$

### 10.1 Forma asintotica degli stati nel continuo

L'equazione precedente può essere risolta e la funzione d'onda determinata esattamente. Ma qui ci poniamo un obiettivo più limitato, cioè quello di determinare la forma asintotica della funzione d'onda per  $r \rightarrow \infty$ . Questa infatti porta l'informazione sulla collisione che viene elaborata dai rivelatori di particelle posti appunto lontano dalla regione d'interazione.

Per determinare la forma asintotica dell'equazione di Schrödinger, dobbiamo studiare il kernel (funzione di Green)

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \vec{r} | \frac{1}{E \pm \mathbf{p}^2/2m} | \vec{r}' \rangle = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3 \int d^3\vec{p}' \frac{e^{i\vec{p}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/\hbar}}{E \pm \frac{\mathbf{p}'^2}{2m}} \quad (10.5)$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm i p |\vec{r} - \vec{r}'|/\hbar}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.6)$$

Ricordiamo che  $E = p^2/2m$ .

Il calcolo dell'integrale che porta all'ultima linea viene presentato nell' Appendice a questo capitolo. Per  $r \rightarrow \infty$  possiamo approssimare

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \quad (10.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (10.8)$$

da cui la funzione di Green assume la forma asintotica

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm i p r/\hbar} e^{\mp i \vec{p}_r \cdot \vec{r}'/\hbar}}{r} \quad (10.9)$$

dove  $\vec{p}_r$  è un vettore di modulo  $p$  nella direzione di  $\vec{r}$ . In definitiva la equazione di Schrödinger asintoticamente si scrive

$$\psi_p(\vec{r}) \approx e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar} - f_{\vec{p}\vec{p}'} e^{\pm i p r/\hbar} \quad (10.10)$$

dove abbiamo introdotto la quantità  $f_{\vec{p}\vec{p}'}$ , chiamata ampiezza di diffusione

$$f_{\vec{p}\vec{p}'} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{p}_r \cdot \vec{r}'/\hbar} V(\vec{r}') \psi_p(\vec{r}') \quad (10.11)$$

dove abbiamo scelto il segno + che fissa l'onda sferica come onda sferica uscente. L'ampiezza di diffusione, come vedremo, descrive tutte le proprietà osservabili di un processo di diffusione quantistico. Osserviamo che si tratta di diffusione elastica poichè il potenziale cambia solo la direzione della particella incidente dalla direzione di  $\vec{p}$  alla direzione di  $\vec{p}' = \vec{p}_r$  essendo i moduli dei due vettori gli stessi ( $p = p'$ ).

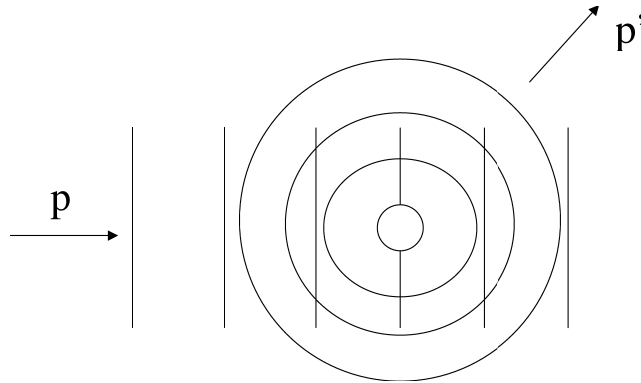


Figura 10.1: Funzione d'onda asintotica di diffusione

La forma asintotica dell'equazione di Schrödinger si interpreta facilmente con l'ausilio della figura accanto. Si distinguono due parti: l'onda piana incidente corrispondente alle particelle incidenti di impulso  $\vec{p}$  e un'onda sferica uscente dal centro del potenziale che corrisponde alle particelle interagenti con il potenziale. Queste ultime possono uscire in qualunque direzione, ma con probabilità diversa data dalla ampiezza  $f_{\vec{p},\vec{p}'}$ . Notiamo che il segno + nell'esponenziale corrisponde ad onde sferiche uscenti, mentre il segno meno ad onde sferiche entranti.

## 10.2 Sezione d'urto di diffusione elastica

Negli esperimenti di collisione si misura la sezione d'urto per avere informazione sul meccanismo d'interazione. La sezione d'urto è il rapporto tra il numero di particelle rivelate sul rivelatore posto all'angolo  $\Omega$  (per unità di tempo) sul numero di particelle incidenti sulla targhetta (per unità di tempo). Teoricamente è il rapporto tra il flusso uscente per unità di angolo solido  $d\Omega$  nella direzione  $\vec{p}'$  ed il flusso incidente per unità di superficie nella direzione  $\vec{p}$

$$\sigma(\Omega) = \frac{\frac{d\Phi_{out}}{d\Omega}}{\frac{d\Phi_{in}}{dS}} = \frac{\frac{d\Phi_{out}}{dS}}{\frac{d\Phi_{in}}{dS}} r^2 \quad (10.12)$$

dove  $dS = r^2 d\Omega$  Il flusso entrante nella direzione  $\hat{p}$  è uguale alla corrente nella direzione  $\hat{p}$

$$\frac{d\Phi_{in}}{dS} = \hat{p} \cdot \vec{J}_{in} = \hat{p}' \cdot \left[ \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right] = \frac{p}{m} = v \quad (10.13)$$

dove abbiamo solo preso la parte di  $\psi$  corrispondente all'onda piana incidente. La corrente uscente nella direzione  $\hat{p}' = p\hat{r}$  è

$$\frac{d\Phi_{out}}{dS} = \hat{p}' \cdot \vec{J}_{out} = \hat{p}' \cdot \left[ \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right] = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \frac{\partial}{\partial r} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial r} \psi^*) = \frac{v}{r^2} |f_{\vec{p}, \vec{p}'}|^2 \quad (10.14)$$

dove ora abbiamo considerato la parte della funzione d'onda che corrisponde all'onda sferica uscente. Nel calcolo si è utilizzata la proprietà  $\hat{p}' \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r}$ . Si sono trascurati termini dell'ordine di  $1/r^4$ . Considerando il rapporto tra le due correnti finiamo con

$$\sigma(\Omega) = |f_{\vec{p}, \vec{p}'}|^2 \quad (10.15)$$

## 10.3 Approssimazione di Born per la sezione d'urto di diffusione elastica

L'ampiezza di diffusione, Eq.(10.11), si può porre sotto forma di serie di potenze dell'interazione  $V$ , applicando ripetutamente l'equazione di Schrödinger alla funzione d'onda  $\psi$  che appare sotto segno d'integrale. Si ottiene facilmente

$$f_{\vec{p}, \vec{p}'} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\vec{r}' e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}' / \hbar} V(\vec{r}') [e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}' / \hbar} + \int d\vec{r}'' e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{r}'' / \hbar} V(\vec{r}'') e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}'' / \hbar} + \dots] \quad (10.16)$$

Se l'interazione è sufficientemente debole, si ci può aspettare che i termini successivi al primo siano trascurabili. Il troncamento al primo ordine della serie si chiama approssimazione di Born: in pratica consiste nell'approssimare la funzione d'onda esatta nell'equazione Eq.(10.4) con la sua forma asintotica, che è l'onda piana. Si ha allora in approssimazione di Born

$$f_{\vec{p}, \vec{p}'} \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\vec{r}' e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}' / \hbar} V(\vec{r}') \quad (10.17)$$

La funzione  $\tilde{V}$  è la trasformata di Fourier del potenziale. I due vettori  $\vec{p}$  e  $\vec{p}'$  differiscono solo in direzione. Indicando con  $\theta$  l'angolo tra le rispettive direzioni, si ha

$$(\vec{p}' - \vec{p})^2 = 2p^2(1 - \cos\theta) = 4p^2 \sin^2(\theta/2) \quad (10.18)$$

## 10.4 Scattering da potenziale nucleare e coulombiano

Consideriamo il caso del potenziale di Yukawa

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (10.19)$$

Osserviamo, en passant, che questo potenziale è il limite statico della interazione tra due nucleoni basata sullo scambio di mesoni. Il raggio d'interazione è inversamente proporzionale alla massa del mesone scambiato e quindi l'interazione di Yukawa è a raggio finito poiché i mesoni hanno massa finita. In effetti l'interazione di Yukawa contiene come caso limite l'interazione coulombiana per  $\mu \rightarrow 0$ , che è consistente col modello che anche l'interazione coulombiana sia mediata dallo scambio di particelle. Queste ultime sono i fotoni, la cui massa nulla corrisponde appunto ad un raggio d'interazione infinito. La trasformata di Fourier del potenziale di Yukawa si calcola facilmente e si trova

$$\tilde{V} = \frac{4\pi V_0}{(\vec{p}' - \vec{p})^2 + \mu^2} = \frac{4\pi V_0}{(2p \sin(\theta/2))^2 + \mu^2} \quad (10.20)$$

Quindi si calcola la sezione d'urto di diffusione elastica. Nel caso limite di diffusione da potenziale coulombiano ( $\mu = 0$  e  $V_0 = e^2$ ) si ottiene

$$\sigma(\theta) = \frac{m^2 e^4}{(2\pi \hbar^2 p^2)^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (10.21)$$

che coincide con la formula classica di Rutherford per collisione fra due cariche puntiformi. La coincidenza è puramente accidentale. L'approssimazione di Born per la diffusione coulombiana risulta un'ottima approssimazione poiché l'intensità del campo coulombiano è piccola. Quest'ultima è governata dalla costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (10.22)$$

il cui valore  $\ll 1$  giustifica appunto il troncamento al primo ordine della ampiezza di diffusione. Infatti il fattore in fronte alla sezione d'urto è proporzionale ad  $\alpha^2$ , ed andando al secondo ordine si avrebbe un termine proporzionale ad  $\alpha^4$ .

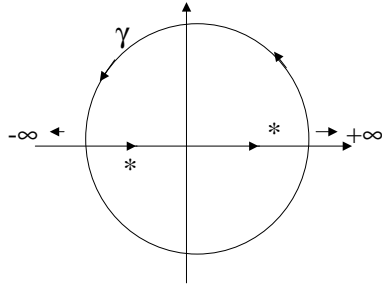


Figura 10.2: Poli della funzione di Green

## 10.5 Appendice

Effettuiamo l'integrale dell' Eq.(10.5) facendo uso del teorema dei residui. Posto  $(r - r')/\hbar = s$ , effettuiamo prima l'integrale sugli angoli

$$I = 2m \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty \frac{e^{ip's\cos\theta}}{p^2 - p'^2} = \frac{2\pi m}{is} \int_{-\infty}^\infty p' dp' \frac{e^{ip's}}{p^2 - p'^2} \quad (10.23)$$

Per effettuare l'ultimo integrale si estende prima l'integrando nel piano  $p'$  complesso quindi si chiude il dominio d'integrazione mediante il semicerchio  $\gamma$  di raggio  $R \rightarrow \infty$  nel semipiano superiore, come illustrato in figura. Così facendo abbiamo aggiunto un contributo, l'integrale su  $\gamma$  da un contributo che è nullo poiché l'esponenziale tende a zero per  $R \rightarrow \infty$  con  $\text{Im} p' > 0$ . Avendo trasformato il dominio d'integrazione in un circuito chiuso possiamo applicare il teorema dei residui, secondo cui  $I$  è uguale a  $2\pi i$  per la somma sui residui nei poli interni al circuito

$$I = \frac{2\pi m}{is} \oint p' dp' \frac{e^{ip's}}{p^2 - p'^2} = \frac{2\pi m}{is} \oint p' dp' \frac{e^{ip's}}{(p - p')(p + p')} \quad (10.24)$$

Ricordiamo che la piccola quantità immaginaria aggiunta all'energia che ha consentito l'inversione del kernel si ritrova (scegliamo il segno  $\pi$ ) in  $p + i\epsilon$  quindi abbiamo due poli come in figura di cui solo il polo  $p' = p + i\epsilon$  contribuisce all'integrale. Calcolato il residuo, troviamo

$$I = \frac{2\pi m}{is} \pi e^{ips} \quad (10.25)$$

## 10.6 Problemi

Calcolare in approssimazione di Born la sezione d'urto di diffusione elastica per il potenziale

$$V(r) = V_0 \theta(r_0 - r) \quad (10.26)$$