Capitolo 2

STATI E VARIABILI DINAMICHE IN MECCANICA QUANTISTICA

2.1 Stati di un sistema quantico come vettori dello spazio di Hilbert

Nei capitoli successivi vedremo le leggi della MQ, ma prima dobbiamo fissarne il formalismo già iniziato a descrivere nel paragrafo precedente per il caso dell'esperimento di Stern-Gerlach. In generale un esperimento fisico è finalizzato a misurare una osservabile (per esempio stato di polarizzazione di una sorgente di atomi paramagnetici). L'apparato sperimentale è formato da una sorgente S che prepara il sistema fisico in uno stato definito, un opportuno dispositivo con cui il sistema interagisce (campo magnetico, targhetta,...) ed una serie di rivelatori che definiscono tutti e soli gli stati finali in cui il sistema viene osservato. L'esperimento viene ripetuto N volte, nel modo in cui si è discusso prima, ed il risultato finale è costituito dai conteggi N_n (n=1,M) sui rivelatori e quindi dalle rispettive probabilità $P_n = N_n/N$. Qualunque sia lo stato iniziale, lo spettro degli stati finali è sempre lo stesso, quello che dipende dallo stato iniziale è la distribuzione di probabilità fra gli stati di rivelazione.

In virtù del principio di sovrapposizione possiamo associare agli stati del un sistema quantico **vettori** di uno spazio lineare astratto (**spazio di Hilbert**). L'insieme dei vettori di base è costituito da tutti i possibili stati in cui il sistema si viene a trovare dopo una misura. Questi vettori formano un insieme completo ortonormale. La completezza implica che uno stato qualunque $|\psi>$ del sistema preparato dalla sorgente S possa scriversi come sovrapposizione lineare dei vettori di base

$$|\psi>= \sum_n A_n|n> \tag{2.1}$$

e l'ortonormalità dalla relazione

$$< n|m >= \delta_{n,m} \tag{2.2}$$

dove il simbolo $\delta_{n,m}$ è la delta di Kroneker. I coefficienti di sovrapposizione A_n sono fissati (a meno di un fattore di fase) dalle probabilità P_n associate al numero dei conteggi N_n ottenuti in un insieme di misure, cioè

$$P_n = |A_n|^2 = | < n|\psi > |^2 \tag{2.3}$$

2.2 Osservabili fisiche come operatori nello spazio di Hilbert

La completezza degli stati $|n>$ si puo esprimere in forma simbolica nel modo seguente: consideriamo il modulo quadro dello stato $|\psi>$ dell' Eq. (27) e applichiamo la Eq. (29)

$$<\psi|\psi>=\sum_n <\psi|n><n|\psi>=\sum_n <\psi|\mathcal{P}_n|\psi>=1 \tag{2.4}$$

$$\mathcal{P}_n = |n><n| \tag{2.5}$$

Il simbolo $\mathcal{P}_n$, applicato ad un vettore di stato $|\phi>$, lo proietta nello stato $|n>$, e quindi stabilisce una corrispondenza tra vettori dello spazio di Hilbert. Questa corrispondenza è quello che chiamiamo *operatore*: quindi $\mathcal{P}_n$ è un operatore, di tipo speciale per il ruolo che svolge, viene infatti chiamato operatore di proiezione. Sommando su tutti gli stati di base si ottiene dall'Eq. (30)

$$\sum_n \mathcal{P}_n = \mathbf{I} \tag{2.6}$$

dove $\mathbf{I}$ rappresenta l'operatore identità, che trasforma uno stato in sé stesso. L'Eq.(32) è un modo di esprimere formalmente il fatto che gli stati $|n>$ formano un insieme completo ortonormale. L'Eq. (32) rappresenta anche una possibile realizzazione dell'operatore identità.

Tornando alla descrizione dei dati sperimentali, un apparato è generalmente finalizzato a misurare una osservabile fisica O. Ad ogni rivelatore è associato uno stato $|n>$ a cui corrisponde un valore definito per l'osservabile, che chiamiamo O_n. Ripetendo l'esperimento un gran numero N di volte abbiamo tutto lo spettro dei possibili valori $O_1, O_2, .., O_n, ..,$ con le rispettive probabilità $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ Lo spettro dei valori, che O puo prendere, non dipende dallo stato $|\psi>$ di preparazione della sorgente, ma vi dipendono le rispettive probabilità. A causa di questo comportamento probabilistico del sistema dobbiamo invocare gli ingredienti della statistica per descrivere i fenomeni osservati e i risultati di misura. Primo di tutti il valor medio dell'osservabile O. Adoperando il formalismo sinora sviluppato e la definizione di valor medio, si ha

$$<O>=\sum_n O_n|A_n|^2=\sum_n <\psi|n>O_n<n|\psi>=<\psi|(\sum_n O_n\mathcal{P}_n)|\psi> \tag{2.7}$$

La quantità in parentesi è la somma degli operatori di proiezione sui singoli stati di rivelazione della osservabile O ciascuno moltiplicato per il corrispettivo valore O_n associato al rivelatore n-imo. Questa quantità definisce un operatore $\mathbf{O}$ che associamo alla variabile dinamica O.

$$\mathbf{O}=\sum_n O_n\mathcal{P}_n \tag{2.8}$$

In questo modo abbiamo introdotto l'operatore corrispondente alla osservabile O nella forma di rappresentazione spettrale di $\mathbf{O}$. Il valor medio si scrive quindi

$$<O>=<\psi|\mathbf{O}|\psi> \tag{2.9}$$

Altri valori medi associati ai risultati di misura si possono scrivere in maniera altrettanto semplice nel formalismo di Dirac. Un valor medio particolarmente importante è lo scarto quadratico medio della osservabile O:

$$(\Delta O)^2=\sum_n(O_n-<O>)^2|A_n|^2=<\psi|(\mathbf{O}-<\psi|\mathbf{O}|\psi>)^2|\psi> \tag{2.10}$$

2.3 Proprietà generali di stati e osservabili fisiche

Una volta associato un operatore $\mathbf{O}$ nello spazio di Hilbert alla osservabile O, i risultati di misura O_n ed i rispettivi vettori $|n>$ acquistano il significato di autovalori ed autovettori, rispettivamente, dell'operatore $\mathbf{O}$. Infatti si ha

$$\mathbf{O}|k>=\sum_n O_n|n><n|k>=\sum_n O_n\delta_{nk}=|k>O_k \tag{2.11}$$

o anche

$$\mathbf{O}|O_k>=|O_k>O_k \tag{2.12}$$

$$f(\mathbf{O})|O_k>=|O_k>f(O_k)$$

che è l'equazione agli autovalori per l'operatore $\mathbf{O}$ e per una sua funzione, rispettivamente. Siccome i valori assunti dalla osservabile O sono numeri reali l'operatore corrispondente deve essere un operatore autoaggiunto. Definiamo l'aggiunto di un operatore nel modo seguente

$$<\psi|\mathbf{O}^+|\phi>=<\phi|\mathbf{O}|\psi>^* \tag{2.13}$$

il che equivale a scambiare O_n con O_n^* nell'Eq. (34). Se gli autovalori sono numeri reali $\mathbf{O}=\mathbf{O}^+$ e l'operatore si dice autoaggiunto. Una ulteriore condizione perché un operatore possa rappresentare una osservabile fisica è che i suoi autostati formano un insieme completo di stati. Infatti se così non fosse, ci sarebbero degli stati che non possono essere espressi come sovrapposizione lineare degli autostati di $\mathbf{O}$ e quindi per questi stati quella osservabile non potrebbe essere misurata.

Il carattere operatoriale delle osservabili in MQ solleva un problema di enorme importanza. Se gli operatori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ corrispondenti a due osservabili hanno un insieme completo di autostati simultanei allora essi commutano. Infatti scrivendo le rispettive equazioni agli autovalori

$$\mathbf{A}|A_n\ B_m>=|A_n\ B_m>A_n \tag{2.14}$$

$$\mathbf{B}|A_n\ B_m>=|A_n\ B_m>B_m \tag{2.15}$$

moltiplicando la prima per $\mathbf{B}$ e la seconda per $\mathbf{A}$ e sottraendo membro a membro otteniamo

$$(\mathbf{BA}-\mathbf{AB})|A_n\ B_m>=|A_n\ B_m>(B_m\ A_n-A_n\ B_n)=0 \tag{2.16}$$

poiché i rispettivi autovalori commutano in quanto numeri. In generale due operatori, che non commutano, sono incompatibili,cioè non si possono assegnare simultaneamente valori definiti per le corrispondenti osservabili. Questo succede per la coppia posizione ed impulso di una particella, per le componenti del momento angolare, etc.

In conclusione, nel formalismo della MQ gli stati di un sistema quantico vengono descritti da vettori dello spazio di Hilbert e le osservabili fisiche da operatori autoaggiunti. I loro autovalori rappresentano tutti e soli i possibili risultati di misura ed i corrispondenti autostati gli stati di rivelazione. Il carattere operatoriale delle osservabili fisiche pone il problema delle regole di commutazione fra osservabili fisiche.