

## Capitolo 3

# TRASLAZIONI SPAZIALI

### 3.1 Operatore di posizione e funzione d'onda

Nell'esperimento di Young abbiamo visto che non si può associare una traiettoria ad un sistema quantico, in altri termini non possiamo determinarne la posizione istantanea con certezza ( se non in casi estremi), ma solo la probabilità di trovarlo nei diversi punti dello spazio.

Supponiamo di effettuare delle misure di posizione di un sistema quantico preparato dalla sorgente S nello stato  $|\psi\rangle$ . Ripetendo l'esperimento troveremo il sistema nella posizione  $\vec{r}$  con probabilità  $|\langle \vec{r}|\psi\rangle|^2$ . In base al principio di sovrapposizione scriveremo

$$|\psi\rangle = \int d^3\vec{r} \psi(\vec{r}) |\vec{r}\rangle \quad (3.1)$$

La funzione  $\psi(\vec{r}) = \langle \vec{r}|\psi\rangle$  è una ampiezza di probabilità speciale e prende il nome di **funzione d'onda**. Il calcolo della funzione d'onda di un sistema quantico è uno degli obiettivi fondamentali della meccanica quantistica. Per esempio la funzione d'onda di un elettrone interagente col nucleo atomico, di una particella collidente su una targhetta, di un atomo in uno stato condensato e via dicendo.

L'Eq. (3.1) non differisce dall'Eq. (2.1) se non per il fatto che in quel caso gli autovalori della osservabile formavano un spettro discreto mentre ora formano uno spettro continuo. Quindi la somma va sostituita dall'integrale. Si trova che lo spettro dei valori (autovalori) dell'operatore di posizione coincide con quello della meccanica classica: un sistema quantico è localizzabile in qualunque punto, compatibilmente con i vincoli esterni. Quindi la somma va sostituita dall'integrale.

In virtù dell'ipotesi di localizzabilità possiamo assumere che la posizione di un corpo sia una variabile dinamica anche in meccanica quantistica e che quindi possa rappresentarsi come operatore autoaggiunto  $\vec{r}$  i cui autostati siano gli stati in cui il sistema possa essere misurato, cioè

$$\vec{r} |\vec{r}'\rangle = |\vec{r}'\rangle \vec{r}' \quad (3.2)$$

dove  $\vec{r}'$  sono gli autovalori, cioè le possibili posizioni nello spazio in cui il sistema viene rivelato una volta sottoposto ad osservazione.

Gli autostati formano uno spettro completo, quindi un qualunque stato del sistema  $|\psi\rangle$  si può esprimere come sovrapposizione degli autostati di  $\vec{r}$ , d'accordo con l'Eq. (3.1). Autostati di  $\vec{r}$  appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali, cioè  $\langle \vec{r}'|\vec{r}\rangle = 0$  per  $\vec{r} \neq \vec{r}'$ . Cosa succede nel caso  $\vec{r} = \vec{r}'$ ?

Proiettiamo l'Eq. (3.1) sullo stato  $|\vec{r}'\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \psi \rangle &= \int d^3 \vec{r} \psi(\vec{r}) \langle \vec{r}' | \vec{r} \rangle \\ &= \psi(\vec{r}') \int d^3 \vec{r} \langle \vec{r}' | \vec{r} \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$= \int d^3 \vec{r} \psi(\vec{r}) \langle \vec{r}' | \vec{r} \rangle \quad (3.4)$$

Nel secondo passaggio abbiamo applicato il fatto che il solo contributo viene dal punto  $\vec{r} = \vec{r}'$ . L'integrale che resta deve essere finito, in particolare uguale ad 1. Affinchè ciò accada l'integrando dev'essere infinito. Una possibile realizzazione di questo comportamento si ottiene mediante la funzione a gradino:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \quad \text{se } |x| \leq L \\ &= 0 \quad \text{se } |x| > L \end{aligned} \quad (3.5)$$

che per  $L \rightarrow \infty$  tende all'infinito ma nello stesso tempo mantiene uguale ad 1 l'area del gradino. Questa

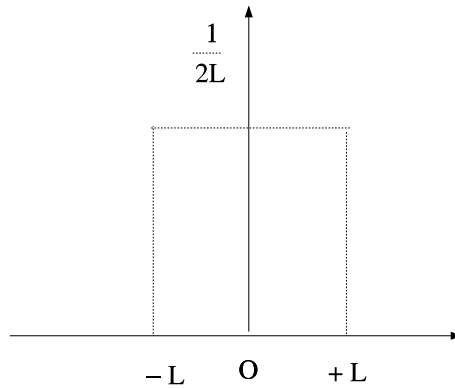


Figura 3.1: Funzione gradino. Al limite per  $L \rightarrow \infty$  diventa una funzione  $\delta$  di Dirac.

funzione è in realtà un funzionale e prende il nome di  $\delta$  di Dirac.

Dobbiamo osservare che l'operatore autoaggiunto  $\vec{r}$  è in realtà un operatore vettoriale, cioè l'insieme di tre operatori, cioè  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ , tanti quanti sono necessari per localizzare nello spazio un corpo (ma si potevano scegliere per es. le coordinate polari o cilindriche). I tre operatori di posizione sono compatibili tra di loro nel senso che sono simultaneamente misurabili, ipotesi implicita nella assunzione di localizzabilità. Questo implica che essi commutano l'un l'altro

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [\mathbf{x}, \mathbf{z}] = [\mathbf{y}, \mathbf{z}] = 0 \quad (3.6)$$

Gli stati  $|\vec{r}'\rangle = |x', y', z'\rangle$  sono quindi autostati simultanei dei tre operatori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  appartenenti agli autovalori  $x', y', z'$  rispettivamente, cioè

$$\mathbf{x} |x', y', z'\rangle = |x', y', z'\rangle x' \quad (3.7)$$

$$\mathbf{y} |x', y', z'\rangle = |x', y', z'\rangle y' \quad (3.8)$$

$$\mathbf{z} |x', y', z'\rangle = |x', y', z'\rangle z' \quad (3.9)$$

Ribadiamo che l'ipotesi che le tre componenti dell'operatore  $\vec{r}$  commutano discende dall'ipotesi di localizzabilità dei sistemi quantici. Il che non è ovvio, perchè ad esempio vedremo che le componenti del momento angolare non commutano tra di loro, quindi non sono simultaneamente misurabili.

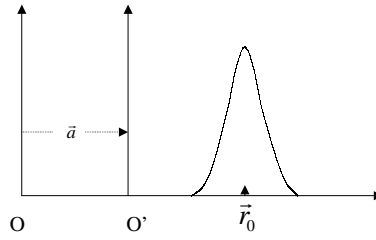


Figura 3.2: La distribuzione di probabilità  $\psi(\vec{r})$  è la stessa per O ed O', ma per esempio il massimo che O vede in  $\vec{r}_0$  O' lo vede in  $\vec{r}_0 - \vec{a}$ .

### 3.2 Traslazioni spaziali ed operatore impulso

Siamo ora nelle condizioni di costruire l'operatore di traslazione spaziale. Effettuiamo una traslazione rigida del nostro sistema del vettore  $-\vec{a}$  nel riferimento O. Questa operazione è equivalente a traslare il riferimento O di  $\vec{a}$ , che sposta l'origine da O in O'. Se non intervengono cause esterne che possano modificare l'omogeneità dello spazio, le proprietà del sistema restano invariate per traslazione rigida, in particolare la funzione d'onda traslata è uguale a quella non traslata, quindi come è illustrato in Fig. (3.1) si ha

$$\psi_{\vec{a}}(\vec{r} - \vec{a}) = \psi(\vec{r}) \quad (3.10)$$

dove con  $\psi_{\vec{a}}$  abbiamo indicato il vettore di stato traslato. La traslazione genera una corrispondenza biunivoca fra vettori di stato dello spazio di Hilbert e quindi sarà descritta in meccanica quantistica da un operatore  $\mathbf{U}_{\vec{a}}$ , cioè  $\mathbf{U}_{\vec{a}}|\psi\rangle = |\psi_{\vec{a}}\rangle$  ed in particolare per gli stati di posizione

$$\mathbf{U}_{\vec{a}}|\vec{r}\rangle = |\vec{r} - \vec{a}\rangle \quad (3.11)$$

A causa della invarianza delle ampiezze di probabilità, Eq. (3.9),  $\mathbf{U}_{\vec{a}}$  è un operatore unitario, infatti

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{\vec{a}}(\vec{r} - \vec{a}) = \langle \vec{r} - \vec{a} | \mathbf{U}_{\vec{a}} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \mathbf{U}_{\vec{a}}^{\dagger} \mathbf{U}_{\vec{a}} | \psi \rangle \quad (3.12)$$

che unita al requisito di esistenza dell'operatore inverso  $\mathbf{U}_{\vec{a}}^{-1}$  porta alla proprietà che definisce un operatore unitario

$$\mathbf{U}_{\vec{a}} \mathbf{U}_{\vec{a}}^{\dagger} = \mathbf{U}_{\vec{a}}^{\dagger} \mathbf{U}_{\vec{a}} = \mathbf{1} \quad (3.13)$$

L'esistenza dell'operatore inverso è garantita dal fatto che una traslazione del vettore  $\vec{a}$  seguita da una traslazione del vettore  $-\vec{a}$  riporta il sistema nella posizione iniziale, quindi  $\mathbf{U}_{\vec{a}} \mathbf{U}_{-\vec{a}} = \mathbf{1}$ . Ne segue che esiste l'operatore inverso ed è uguale a  $\mathbf{U}_{\vec{a}}^{-1} = \mathbf{U}_{-\vec{a}}$ .

Possiamo anche introdurre le traslazioni infinitesime assumendo  $a^2 \ll a$ , perchè comunque una traslazione finita si può sempre ottenere da una serie infinita di traslazioni infinitesime e queste ultime sono più facili da studiare. Sviluppando l' Eq.(3.10) (con  $\vec{r} + \vec{a}$  al posto di  $\vec{r}$ ) in serie fino al primo ordine si ha

$$\langle \vec{r} | \mathbf{U}_{\vec{a}} | \psi \rangle = \psi_{\vec{a}}(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}) = \psi(\vec{r}) + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (3.14)$$

da cui

$$\mathbf{U}_{\vec{a}} = \mathbf{1} + \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{\mathbf{p}} \quad (3.15)$$

avendo introdotto l'operatore  $\vec{\mathbf{p}}$  che gode della proprietà

$$\langle \vec{r} | \vec{\mathbf{p}} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi \quad (3.16)$$

e nel caso in cui  $|\psi\rangle \equiv |\vec{r}'\rangle$

$$\langle \vec{r} | \vec{\mathbf{p}} | \vec{r}' \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.17)$$

L'operatore  $\vec{\mathbf{p}}$  prende il nome di generatore della traslazione e risulta autoaggiunto in virtù del carattere unitario di  $\mathbf{U}_{\vec{a}}$  e per l'introduzione dell'unità immaginaria  $i$ . La costante  $\hbar = h/2\pi$ , che ha le dimensioni di una azione, viene introdotta qui per rendere adimensionato il prodotto  $\vec{p} \cdot \vec{a}$ , che ha anche le dimensioni di una azione. Ma vedremo in seguito che  $\hbar$  va identificata con la costante di Plank.

**In analogia con il caso classico in cui il generatore delle trasformazioni canoniche infinitesime corrispondenti alle traslazioni spaziali risulta l'impulso totale del sistema, ora identifichiamo il generatore delle trasformazioni unitarie infinitesime che descrivono in MQ le traslazioni spaziali con l'osservabile impulso della MQ.**

Una traslazione finita puo essere ottenuta come una successione di traslazioni infinitesime applicando la legge di composizione:

$$\mathbf{U}_{\vec{a}} = \mathbf{U}_{\vec{a}_1} \mathbf{U}_{\vec{a}_2} \cdots \mathbf{U}_{\vec{a}_N} \quad (3.18)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a}_1 \cdot \vec{\mathbf{p}}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a}_2 \cdot \vec{\mathbf{p}}} \cdots e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a}_N \cdot \vec{\mathbf{p}}} \quad (3.19)$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{\mathbf{p}}} \quad (3.20)$$

dove  $\vec{a}_i$  ( $i = 1, N \rightarrow \infty$ ) sono traslazioni infinitesime tali che  $\sum \vec{a}_i = \vec{a}$ .

Dalla Eq. (3.15) constatiamo che l'azione dell'operatore impulso sugli stati nella rappresentazione delle coordinate diagonali, cioè sulle funzioni d'onda del tipo  $\psi(\vec{r})$ , è quella del gradiente. Possiamo quindi scrivere l'equazione agli autovalori per l'operatore impulso nella rappresentazione delle coordinate

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) = \vec{p}' \psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) \quad (3.21)$$

dove  $\vec{p}'$  è l'autovalore corrispondente all'autofunzione  $\psi_{\vec{p}'}(\vec{r})$ . Quest'ultima rappresenta la funzione d'onda di una particella d'impulso definito  $\vec{p}'$ , cioè una particella libera. L'equazione precedente è una equazione differenziale omogenea del primo ordine la cui soluzione generale è

$$\psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}' \cdot \vec{r}} \quad (3.22)$$

La soluzione esiste per ogni autovalore dell'impulso  $\vec{p}'$  e quindi una particella libera può avere qualunque impulso come nel caso classico. La costante è stata fissata in modo da normalizzare opportunamente lo stato del sistema. Mentre la funzione d'onda dipende dalla posizione, il suo modulo quadro è costante in tutto lo spazio, cioè la probabilità di trovare una particella d'impulso definito è la stessa in tutti i punti dello spazio. La particella è quindi completamente delocalizzata. Naturalmente questa è una situazione ideale poichè non è possibile preparare un sistema in uno stato con impulso perfettamente definito. In base al principio di sovrapposizione un sistema può trovarsi nello stesso tempo in più stati d'impulso il che consente al sistema di trovarsi in una regione limitata dello spazio. Infatti se l'impulso è definito entro un certo intervallo valori allora possiamo sovrapporre le funzioni d'onda  $e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar}$  di ciascun impulso di quell'intervallo per avere la funzione d'onda del sistema (**pacchetto d'onde**)

$$\psi(\vec{r}) = \text{cost} \int e^{\frac{i}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{p}} c_{\vec{p}} \quad (3.23)$$

Questa funzione d'onda è piú o meno localizzata nello spazio a seconda della forma della funzione peso  $c_{\vec{p}}$ .

Possiamo considerare anche l'equazione agli autovalori per l'operatore  $\mathbf{p}^2/2m$ , che vedremo in seguito corrispondere alla energia cinetica di una particella libera. E' una proprietà generale che una funzione di un operatore ha come autostati gli autostati dell'operatore e come autovalori quelli ottenuti sostituendo nella funzione gli autovalori dell'operatore. Ne segue che

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} |\vec{p}'\rangle = |\vec{p}'\rangle \frac{p'^2}{2m}$$

o nella rappresentazione delle coordinate

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_{p'} = \psi_{p'} \frac{p'^2}{2m} \quad (3.24)$$

Quindi le onde piane sono anche autostati della Hamiltoniana di una particella libera. Una situazione piú realistica è quella di una particella libera ma vincolata entro un volume finito. Basti pensare ad un gas ideale contenuto in un volume  $V$ . In questo caso l'equazione agli autovalori dev'essere risolta con la condizione che la funzione d'onda al di fuori del volume in cui la particella è contenuta sia nulla. Consideriamo per semplicità il caso unidimensionale in cui la particella è costretta a stare in un segmento  $|q| < L$ . Le soluzioni della Eq. (3.21) devono allora soddisfare le condizioni

$$\psi(-L) = \psi(L) = 0 \quad (3.25)$$

Separiamo prima la parte reale dalla parte immaginaria dell'equazione agli autovalori. Ciò facendo ci ritroviamo con due equazioni accoppiate che possono essere disaccoppiate passando alle derivate seconde. Alla fine parte reale e parte immaginaria di  $\psi$  soddisfano entrambe ad una equazione della forma della (3.24). La soluzione generale sarà una combinazione lineare di due soluzioni particolari, che sono le funzioni seno e coseno, quindi

$$\psi(q) = u \cos(kq) + v \sin(kq) \quad (k \equiv \frac{p}{\hbar}) \quad (3.26)$$

Le condizioni al contorno sono soddisfatte dalle soluzioni

$$i) \quad \psi_n(q) = \cos(k_n q) \quad k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad (3.27)$$

$$ii) \quad \psi_n(q) = \sin(k_n q) \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.28)$$

con  $n$  intero. Incontriamo qui per la prima volta il caso in cui l'impulso e quindi l'energia

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad (3.29)$$

sono **quantizzati** come conseguenza del fatto che il sistema è confinato in una regione limitata dello spazio. Vedremo che questa è una proprietà generale dei sistemi quantici quando si trovano in una regione limitata dello spazio, cioè in uno **stato legato**. Dalle equazioni (27) e (28) risulta che lo stato di impulso piú basso si ha per  $n=1$  ed è proporzionale ad  $1/L$ . Al limite per  $L$  molto grande lo spettro è praticamente continuo, mentre per  $L$  molto piccolo il primo valore d'impulso é molto grande. Questo proprietà é importante nello studio delle nanostrutture, dove appunto solo particelle con impulsi molto elevati posso muoversi.

### 3.3 Relazioni di indeterminazione di Heisenberg

Gli operatori  $\vec{\mathbf{p}}$  e  $\vec{\mathbf{r}}$  non commutano, il ch  ha profonde implicazioni sulle propriet  delle rispettive variabili dinamiche. Ricaviamo prima le regole di commutazione. Effettuiamo una traslazione infinitesima sulla osservabile  $\vec{\mathbf{r}}$ . L'osservabile traslata  $\vec{\mathbf{r}}_{\vec{\mathbf{a}}}$  si pu  determinare in due modi. Primo:

$$\mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{r}}\mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}^\dagger|\vec{\mathbf{r}}\rangle = \mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{r}}|\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}\rangle = \mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}|\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}\rangle = (\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}})|\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}\rangle = |\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}\rangle = (\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}})|\vec{\mathbf{r}}\rangle \quad (3.30)$$

da cui segue che

$$\mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{r}}\mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}^\dagger = \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}; \quad (3.31)$$

secondo:

$$\mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}\vec{\mathbf{r}}\mathbf{U}_{\vec{\mathbf{a}}}^\dagger = \left(\mathbf{1} + \frac{i}{\hbar}\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}\right)\vec{\mathbf{r}}\left(\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}\right)\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} + \frac{1}{\hbar}[\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{r}}] \quad (3.32)$$

Combinando i due risultati, si ottiene  $\vec{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar}[\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{r}}]$ , ossia

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = i\hbar \quad (3.33)$$

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}_y] = [x, p_z] = [y, p_x] = \dots = 0 \quad (3.34)$$

Quindi componenti di posizione ed impulso nella stessa direzione non commutano e pertanto non possono possedere un insieme completo di autostati simultanei, per cui le rispettive variabili dinamiche non sono simultaneamente misurabili. La nozione di stato della meccanica classica quindi viene confutata dalla meccanica quantistica. Precisiamo che il fatto di non essere simultaneamente misurabili significa per  che non si possono misurare con precisione assoluta, ma solo con una certa indeterminazione. Vedremo ora che questa indeterminazione   fissata dalle propriet  di commutazione appena derivate. I limiti della simultanea misurabilit  di posizione e impulso prendono il nome di relazioni di indeterminazione di Heisenberg, che andiamo a dimostrare.

Consideriamo un sistema quantico che si trova nello stato  $|\psi\rangle$  normalizzato ad uno. Siano  $q_0$  e  $p_0$  posizione ed impulso medio, rispettivamente (  sufficiente trattare il caso unidimensionale). Definiamo

$$|\psi_q\rangle = (\mathbf{q} - q_0)|\psi\rangle \quad |\psi_p\rangle = (\mathbf{p} - p_0)|\psi\rangle \quad (3.35)$$

Dalle regole di commutazione segue

$$2i\text{Im} \langle \psi_q | \psi_p \rangle = \langle \psi_q | \psi_p \rangle - \langle \psi_p | \psi_q \rangle = \langle \psi | [\mathbf{q} - q_0, \mathbf{p} - p_0] | \psi \rangle = i\hbar \quad (3.36)$$

da cui

$$\text{Im} \langle \psi_q | \psi_p \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (3.37)$$

Ricordando che la parte immaginaria di un numero complesso   minore o uguale al suo modulo, applicando la disegugianza di Schwartz si ha

$$\text{Im} \langle \psi_q | \psi_p \rangle \leq |\langle \psi_q | \psi_p \rangle| \leq \|\psi_q\rangle\| \cdot \|\psi_p\rangle\| = \sqrt{\langle \psi_q | \psi_q \rangle} \sqrt{\langle \psi_p | \psi_p \rangle} \quad (3.38)$$

Interpretiamo le quantit  in parentesi. Inserendo dentro ciascuna ampiezza una risoluzione dell'identit  in termini di autostati di coordinate e di autostati d'impulso, rispettivamente, si ha

$$\langle \psi_q | \psi_q \rangle = \int (q' - q_0)^2 |\langle q' | \psi \rangle|^2 \equiv (\Delta q)^2 \quad (3.39)$$

$$\langle \psi_p | \psi_p \rangle = \int (p' - p_0)^2 |\langle p' | \psi \rangle|^2 \equiv (\Delta p)^2 \quad (3.40)$$

Le due grandezze rappresentano gli scarti quadratici medi di posizione ed impulso, rispettivamente. Da (3.37) e (3.38) in definitiva abbiamo

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2 \quad (3.41)$$

Questa diseguaglianza esprime il principio di indeterminazione di Heisenberg che stabilisce precisi limiti alla accuratezza con cui possiamo misurare simultaneamente posizione ed impulso di un sistema quantico. Il suo contenuto è in netto contrasto con la nozione classica di stato, che è appunto basata sul fatto che posizione ed impulso di una particella possono essere assegnati simultaneamente. Due casi estremi si presentano: la posizione del sistema è ben definita, cioè  $\Delta q = 0$ , allora il suo impulso è assolutamente indeterminato, in altri termini  $\Delta p = \infty$  e viceversa se il suo impulso è perfettamente determinato come nel caso delle onde piane allora il sistema è completamente delocalizzato, cioè  $\Delta q = \infty$ .

Possiamo illustrare il principio di indeterminazione con svariati esempi come nella diffrazione da una fenditura, oppure nella costruzione di un pacchetto d'onde. Si può anche mostrare che, se  $|\psi\rangle$  è una funzione d'onda gaussiana l'Eq. (3.41) vale con il segno di uguaglianza e quindi ad uno stato descritto da una funzione d'onda gaussiana corrisponde la minima indeterminazione nella assegnazione simultanea di coordinate ed impulsi.

Una istruttiva applicazione del principio d'indeterminazione riguarda la stabilità dell'atomo. Uno dei problemi della fisica classica era la sua incompatibilità con l'atomo di Rutherford. Infatti dal punto di vista classico un elettrone non può mantenersi in un'orbita stazionaria attorno al nucleo, perché, in quanto particella carica, variando la sua velocità dovrebbe emettere onde elettromagnetiche e, spiralizzando attorno al nucleo da cui è attratto, dovrebbe cadere su di esso. Ma ciò non accade. Il principio d'indeterminazione ci dà una giustificazione qualitativa: infatti, cadendo nel nucleo l'elettrone avrebbe una posizione localizzata sul nucleo e nello stesso tempo perdendo energia finirebbe con l'aver anche impulso anche definito, cioè nullo, contro il principio di indeterminazione. Quello che succede è che l'elettrone va ad occupare uno stato in cui posizione ed impulso sono tali che l'energia totale (cinetica e potenziale) è la minima possibile compatibilmente con il principio d'indeterminazione. Assumendo che lo stato dell'elettrone corrisponda alla minima indeterminazione possibile per cui  $\Delta q \Delta p = \hbar/2$  è possibile stimare il raggio dell'atomo d'idrogeno. Intanto, poiché il potenziale coulombiano generato dal nucleo è a simmetria sferica, la funzione d'onda dell'elettrone nello stato di minima energia dev'essere sferica e la posizione media dell'elettrone deve coincidere con il centro della sfera e quindi con il nucleo stesso posto nell'origine, cioè  $q_0 = 0$ . Inoltre anche l'impulso medio deve essere nullo altrimenti l'elettrone col tempo si allontanerebbe dal nucleo. Calcoliamo l'energia media

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi | \mathbf{p}^2 | \psi \rangle}{2m} - \langle \psi | \frac{e^2}{r} | \psi \rangle \quad (3.42)$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone ed anche del nucleo (protone). Definiamo  $\langle 1/r \rangle = 1/r$ , inoltre  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle = (\Delta p)^2$ . Assumiamo inoltre che  $\Delta r \approx r$ . Dalle relazioni di indeterminazione allora segue

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta r} \simeq \frac{\hbar}{r_0} \quad (3.43)$$

dove abbiamo trascurato il fattore due in questa analisi semiquantitativa. Sostituendo questa espressione nell'energia media restiamo con una funzione di  $r$ . Lo stato fondamentale è quello di minima energia per cui uguagliando a zero la derivata determiniamo il raggio dell'elettrone nello stato fondamentale. Si trova subito

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (3.44)$$

Questa è l'espressione del raggio dell'elettrone nell'atomo di idrogeno, che viene anche ottenuta risolvendo esattamente l'equazione di Schrödinger per l'atomo di idrogeno.  $r_0$  viene chiamato raggio di Bohr.