

# Capitolo 8

## OSCILLATORE ARMONICO

### 8.1 Potenziale di oscillatore armonico

L'oscillatore armonico riveste un ruolo di grande importanza, in quanto sistemi stabili nei più svariati campi della fisica possono effettuare oscillazioni armoniche. Infatti un sistema che si trovi in uno stato di equilibrio stabile effettua oscillazioni di tipo armonico se viene sollecitato da una debole perturbazione. Consideriamo per semplicità un sistema unidimensionale sottoposto ad un generico potenziale  $V(q)$ , dotato di minimo nel punto  $q_0$ . Il sistema, inizialmente in equilibrio in  $q_0$ , viene perturbato debolmente in modo che si sposta poco dalla posizione di equilibrio. Il moto del sistema si determina sviluppando  $V(q)$  in serie di Taylor intorno al punto  $q_0$ . Poichè  $V'(q_0) = 0$  il primo ordine non nullo è il secondo ordine, quindi per piccole oscillazioni si può approssimare

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2}V''(q)|_{q=q_0}(q - q_0)^2.$$

Ponendo  $q_0$  nell'origine,  $V(q_0) = 0$  e  $V''(q_0) = m\omega^2$  il potenziale si scrive nella forma

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2,$$

che genera piccole oscillazioni di un corpo di massa  $m$  con frequenza angolare  $\omega$ .

Fenomeni in cui si presentano oscillazioni armoniche sono: oscillazioni di elettroni nel campo coulombiano dell'atomo, vibrazioni di atomi in una molecola, vibrazioni di ioni in un reticolo cristallino, oscillazioni del campo elettromagnetico in una cavità, ecc.

### 8.2 Oscillatore armonico classico

L'Hamiltoniana di un oscillatore armonico classico è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

Dalle equazioni del moto di Hamilton si trova la soluzione generale:  $q(t) = q_i \cos(\omega t + \phi)$  dove  $q_i$  e  $\phi$  sono determinate dalle condizioni iniziali. Quindi si calcola l'energia

$$E = \frac{1}{2}m \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (8.1)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2q_i^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2q_i^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (8.2)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2q_i^2. \quad (8.3)$$

Al variare delle condizioni iniziali l'energia varia con continuità ed assume sempre valori positivi.

### 8.3 Oscillatore armonico quantistico

Dal punto di vista quantistico dobbiamo sostituire le variabili numeriche classiche  $q$  e  $p$  con gli operatori  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$ , che soddisfano le regole di commutazione  $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar$ . L'operatore Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{q}^2 \quad (8.4)$$

determina con i suoi autovalori ed autovettori le proprietà dell'oscillatore quantistico. L'equazione di Schrödinger

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{q}^2\right)|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad (8.5)$$

si può risolvere con un metodo algebrico (proposto da P.A.M. Dirac). Introduciamo i tre operatori

$$\mathbf{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\mathbf{q} + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}\right) \quad (8.6)$$

$$\mathbf{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\mathbf{q} - \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}\right) \quad (8.7)$$

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}, \quad (8.8)$$

che soddisfano le regole di commutazione

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{1} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{a}] = -\mathbf{a} \quad [\mathbf{N}, \mathbf{a}^\dagger] = \mathbf{a}^\dagger. \quad (8.9)$$

L'equazione di Schrödinger si riscrive nella forma

$$\hbar\omega\left(\mathbf{N} + \frac{1}{2}\right)|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad (8.10)$$

$\mathbf{H}$  ed  $\mathbf{N}$  hanno gli stessi autostati  $|\psi_n\rangle \equiv |n\rangle$ . Se indichiamo con  $n$  gli autovalori di  $\mathbf{N}$  allora gli autovalori di  $\mathbf{H}$  sono  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ .

L'operatore  $\mathbf{N}$  ha semplici proprietà:

- $\mathbf{a}^+|n\rangle$  è autostato di  $\mathbf{N}$  appartenente all'autovalore  $n + 1$
- $\mathbf{a}|n\rangle$  è autostato di  $\mathbf{N}$  appartenente all'autovalore  $n - 1$
- gli autovalori  $n$  sono tutti i numeri interi positivi compreso lo zero.

Le prime due proprietà sono semplici conseguenze delle regole di commutazione Eq.(8.9); la terza proprietà si dimostra come segue. Intanto  $n \geq 0$  poichè  $\langle n|\mathbf{N}|n\rangle = \langle n|\mathbf{a}^+\mathbf{a}|n\rangle = \|\mathbf{a}|n\rangle\|^2 \geq 0$ . Inoltre, dato un autostato  $n$ , applicando ripetutamente l'operatore  $\mathbf{a}$  si arriva necessariamente ad uno stato  $\mathbf{a}^m|n\rangle \sim |n - m\rangle = 0$  che implica  $n = m$  ed essendo  $m$  intero anche  $n$  è intero. Chiamiamo  $|0\rangle$  lo stato con autovalore nullo. Applicando ripetutamente l'operatore  $\mathbf{a}^\dagger$  si possono costruire tutti gli autostati di  $\mathbf{N}$ :

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \mathbf{a}^\dagger |0\rangle \\
|2\rangle &= \frac{\mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{2}} |1\rangle = \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^2}{\sqrt{2!}} |0\rangle \\
|3\rangle &= \frac{\mathbf{a}^\dagger}{\sqrt{3}} |2\rangle = \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^3}{\sqrt{3!}} |0\rangle \\
\dots &\dots \\
|n\rangle &= \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle
\end{aligned}$$

Questi sono anche autostati di  $\mathbf{H}$  ed i rispettivi autovalori sono

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (8.11)$$

La principale caratteristica dello spettro di energia è che i livelli sono equidistanti l'uno dall'altro con una distanza pari a  $\hbar\omega$  e ciò rende facilmente identificabili le oscillazioni collettive negli spettri nucleari, atomici e molecolari. L'energia  $\hbar\omega$  prende il nome di *quanto* di eccitazione perchè è l'unità di energia (più piccola) con cui si costruisce l'intero spettro dell'oscillatore armonico. L'applicazione di  $\mathbf{a}^+$  ( $\mathbf{a}$ ) aggiunge (sottrae) un *quanto* allo stato  $|n\rangle$ , da cui il nome di operatore di creazione (annichilazione). L'operatore  $\mathbf{N}$  conta il numero di *quanti* nello stato  $|n\rangle$  e prende il nome di operatore numero. Lo stato fondamentale  $|0\rangle$ , che è il vuoto di *quanti*, ha energia non nulla, pari a  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ , chiamata energia di punto zero. Questa è una conseguenza del principio di indeterminazione  $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$ , che per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico vale con il segno uguale (minima indeterminazione). Infatti consideriamo il valor medio della hamiltoniana in uno stato generico

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p}^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle \mathbf{q}^2 \rangle. \quad (8.12)$$

Sostituiamo  $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$  con  $(\hbar^2/4 \langle \mathbf{q}^2 \rangle)$  e quindi cerchiamo il minimo (il che equivale a determinare lo stato fondamentale) che si ottiene per  $\langle \mathbf{q}^2 \rangle = \hbar^2/4m^2\omega^2$ . Questo valore, sostituito a sua volta in  $\langle \mathbf{H} \rangle$  da giusto l'energia di punto zero,  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ .

### 8.3.1 Autofunzioni dell'oscillatore armonico

Per calcolare le autofunzioni dell'oscillatore armonico  $\psi_n(q) \equiv \langle q|n\rangle$  seguiamo un metodo iterativo che parte dalla determinazione di  $\psi_0(q) \equiv \langle q|0\rangle$ . Consideriamo la relazione che definisce lo stato fondamentale come vuoto dei quanti d'azione

$$\mathbf{a}|0\rangle = 0. \quad (8.13)$$

Moltiplicando a sinistra per  $\langle q|$  e riesprimendo  $\mathbf{a}$  in funzione di  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  otteniamo:

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle q|\mathbf{q} + \frac{i\mathbf{p}}{m\omega}|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dq}\right) \psi_0(q) = 0.$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine che si integra facilmente. La soluzione con il corretto fattore di normalizzazione è

$$\psi_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}q^2}$$

Una volta determinata la funzione d'onda dello stato fondamentale, le altre funzioni d'onda possono essere ricavate in maniera iterativa applicando ripetutamente a  $\psi_0(q)$  l'operatore  $\mathbf{a}^+$  espresso in termini

di  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , con delle semplici operazioni di derivazione. Come illustrazione vediamo come si genera il primo stato eccitato. Applicando l'eq. (8.7) si ottiene:

$$\psi_1(q) = \langle q|1\rangle = \langle q|\mathbf{a}^\dagger|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dq}\right) \psi_0(q) \quad (8.14)$$

$$= \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{m\omega}{\hbar^3}\right)^3\right]^{1/4} q e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} q^2} \quad (8.15)$$

Iterativamente si generano tutte le altre autofunzioni dell'oscillatore armonico. I polinomi a fattore dell'esponenziale (polinomi di Hermite) formano un insieme completo ortonormale.

t

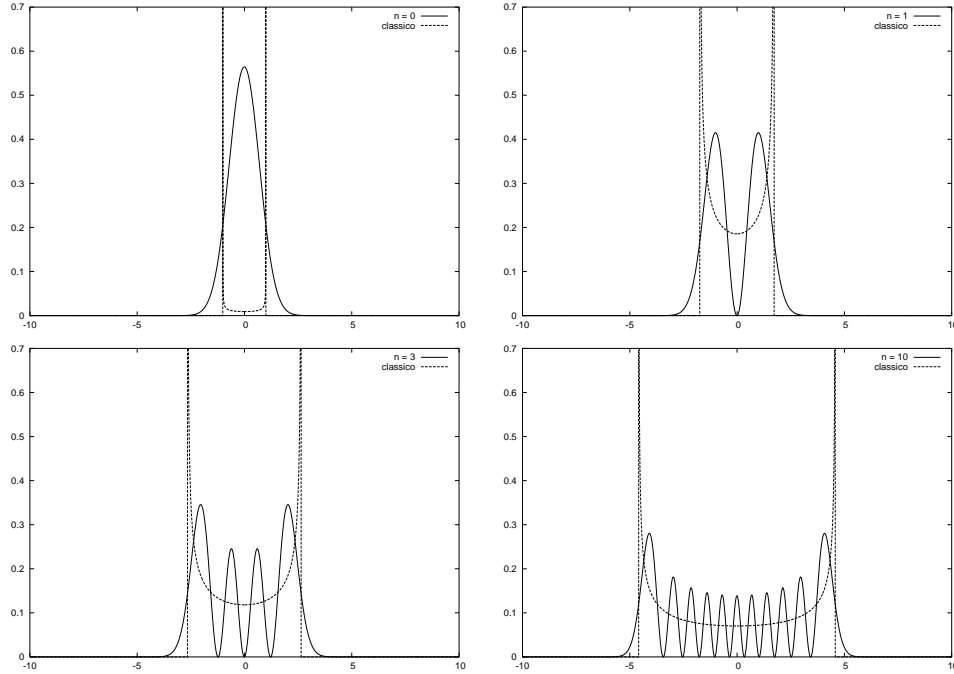


Figura 8.1:  $|\psi_n|^2(q)$  per quattro autostati dell'oscillatore armonico. La probabilità classica, Eq.(18), è rappresentata dalla linea tratteggiata.

### 8.3.2 Limite classico

Consideriamo un sistema sottoposto ad un potenziale di oscillatore armonico unidimensionale. Dal punto di vista quantistico  $|\psi_n(q)|^2$  rappresenta la probabilità di trovare il sistema nel punto  $q$  quando si trova nello stato eccitato  $n$ -imo. Una analoga probabilità può essere definita anche dal punto di vista classico. Il sistema compie una oscillazione tra  $q_i$  e  $-q_i$  in un semiperiodo  $T/2 = \pi/\omega$ . Di questo tempo la frazione  $dt = dq/\dot{q}$  viene spesa per compiere il percorso da  $q$  a  $q + dq$ . Quindi la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo  $q, q + dq$  è data da

$$P(q)dq = \frac{dt}{T/2} = \frac{2dq}{T\dot{q}} \quad (8.16)$$

Ricordando che  $q(t) = q_i \cos(\omega t)$  e  $\dot{q} = -q_i \omega \sin(\omega t)$ , si ha

$$\dot{q} = \omega q_i \sqrt{1 - \frac{q^2}{q_i^2}} \quad (8.17)$$

da cui

$$P(q) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{q_i \sqrt{1 - q^2/q_i^2}} \quad (8.18)$$

La probabilità classica è graficata in Fig.1 assieme alla corrispondente probabilità quantistica, quest'ultima per diversi autostati dell'oscillatore armonico. Per stati di bassa energia si osserva un forte discrepanza tra le due grandezze, che tuttavia si affievolisce man mano che l'energia cresce. Si ha perfetto accordo per  $n \rightarrow \infty$ . In altri termini, ad alta energia la quantizzazione dell'energia diventa sempre meno significativa poiché  $E_n \gg \hbar\omega$ , ed il sistema si comporta classicamente.