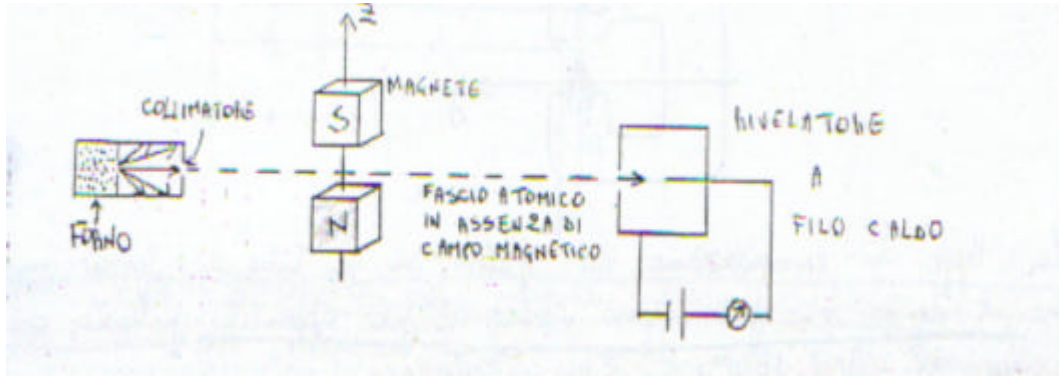


ESPERIENZA DI STERN-GERLACH



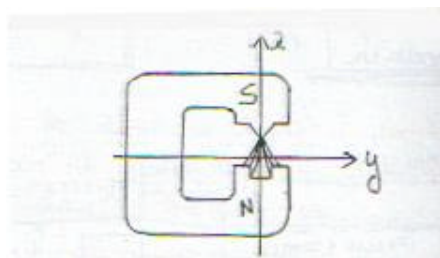
Gli atomi in studio (atomi di argento nell'esperienza di Stern e Gerlach) sono introdotti in un contenitore che è connesso da un piccolo buco ad un grande recipiente altamente sotto vuoto (la pressione residua è minore di 10^{-5} torr; questa è sufficientemente bassa perché il cammino libero medio degli atomi sia molto più grande delle dimensioni del recipiente). Quando il contenitore è riscaldato, si riempie di vapore alla pressione di saturazione corrispondente alla temperatura T . Alcuni atomi scappano attraverso il buco nella parete e, poiché questi atomi non incontrano più alcun ostacolo, percorrono traiettorie rettilinee. Comunque, per entrare nel grande recipiente gli atomi devono passare attraverso un secondo buco fatto in un diaframma. Così, degli atomi che scappano dal vapore sono selezionati: quelli la cui velocità è diretta lungo la linea congiungente i due buchi. Questi atomi costituiscono quello che è chiamato fascio atomico.

All'interno del recipiente sotto vuoto è posto un magnete i cui poli sono costruiti in modo da avere un gradiente di campo magnetico costante lungo \vec{z} e nullo lungo \vec{x} e \vec{y} cioè:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \text{cost} \quad (\text{all'interno del magnete})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

In figura mostriamo la sezione trasversale del magnete nel piano yz perpendicolare al fascio atomico:



La legge di conservazione del flusso in un tubo di forza implica che il campo sia più intenso vicino al polo appuntito piuttosto che vicino all'altro polo.

In queste condizioni, un fascio atomico è sottoposto ad una forza di traslazione media:

$$F_z = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Si trascurano le componenti

$$F_x = M_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial x}; \quad F_y = M_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + M_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + M_z \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad \text{perché, dà una}$$

parte M_x e M_y sono in media nulle (perché il tempo di attraversamento del campo magnetico è

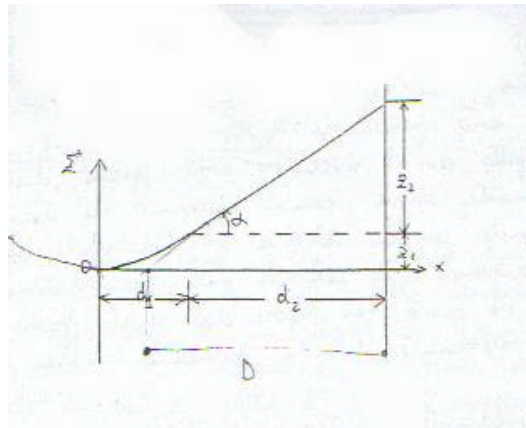
grande rispetto al periodo di rivoluzione di \vec{M} attorno a \vec{B} e perché non stiamo misurando un autostato di M_x né di M_y (così che $M_x = M_y = 0$) dall'altra $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ e $\frac{\partial \vec{B}}{\partial y}$ possono essere resi trascurabili, come abbiamo già osservato.

Attenzione ! La seconda affermazione scritta così come appare è sbagliata, acquista un senso solo se riferita ai valori medi delle proiezioni x e y del momento magnetico .

Un fascio atomico che si muove inizialmente con velocità v parallela ad x e che è sottoposto all'influenza di una forza costante, segue una traiettoria parabolica tra i poli del magnete. Prendendo l'origine degli assi e l'origine del tempo all'entrata dell'atomo tra i poli, il suo moto è descritto dalle equazioni:

$$x = vt$$

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{m} t^2 = \frac{1}{2m} M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} t^2$$



Detta d_1 la lunghezza del magnete, l'atomo lascia la regione tra i due poli dopo un tempo $t_1 = \frac{d_1}{v}$.

In questo tempo si è spostato lungo \vec{z} di una quantità $z_1 = \frac{M_z}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z} t_1^2 = \frac{M_z}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d_1^2}{v^2}$

L'atomo quindi continua in linea retta, ma è stato deflesso di un angolo tale che:

$$tg \alpha = \left(\frac{dz}{dx} \right)_{x=d_1} = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{M_z}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{x^2}{v^2} \right) \right]_{x=d_1} = \frac{M_z}{m} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d_1}{v^2}$$

In corrispondenza, l'atomo si sposta lungo \vec{z} di un'ulteriore quantità z_2 data da:

$$z_2 = d_2 tg \alpha = \frac{M_z}{mv^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} d_1 d_2$$

Dove d_2 è la distanza tra l'estremo destro (secondo la nostra figura) del magnete e il rivelatore. Lo spostamento totale lungo \vec{z} è dato da: $z = z_1 + z_2$.

Per variazioni del campo magnetico di un tesla/metro si hanno deviazioni di qualche centimetro per lunghezze d_2 dell'ordine del metro.

Abbiamo fatto i calcoli per un particolare atomo di velocità v . Comunque, atomi diversi nel fascio hanno diverse velocità e, dalla stessa forza, essi sono spostati di diverse quantità z .

I loro punti di impatto con il rivelatore sono perciò distribuiti su una macchia leggermente estesa, con il massimo di densità della macchia che corrisponde con la velocità più probabile nel fascio atomico. (La distribuzione delle velocità nel fascio atomico è diversa da quella che esiste nel vapore dal quale proviene per il fatto che sono state selezionate velocità parallele ad una particolare direzione).

Si può dimostrare mediante la teoria cinetica dei gas che la velocità v più probabile nel fascio è tale che: $mv^2 = 3kT$

dove T è la temperatura assoluta del vapore e K è la costante di Boltzmann.

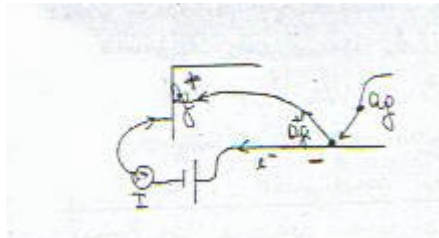
In definitiva si ha:

$$z = \frac{M_z}{mv^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} d_1 \left(\frac{d_1}{2} + d_2 \right) = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d_1 D}{3kT} \quad (1)$$

dove si è posto: $\left(\frac{d_1}{2} + d_2 \right) = D$

tutte le espressioni che compaiono nella (1) sono conosciute eccetto M_z . Misure dello spostamento z permettono perciò la determinazione della componente longitudinale M_z del momento magnetico atomico. Dopo il passaggio attraverso il campo magnetico, gli atomi di argento devono essere rivelati. Inizialmente, Stern e Gerlach posero un foglio bianco come bersaglio e l'argento incidente ne provocava l'annerimento. Dalla distribuzione delle macchie scure potevano avere un'idea della distribuzione spaziale dei momenti magnetici degli atomi. (L'esperimento può essere calcolato facendo passare della luce e misurando la parte trasmessa).

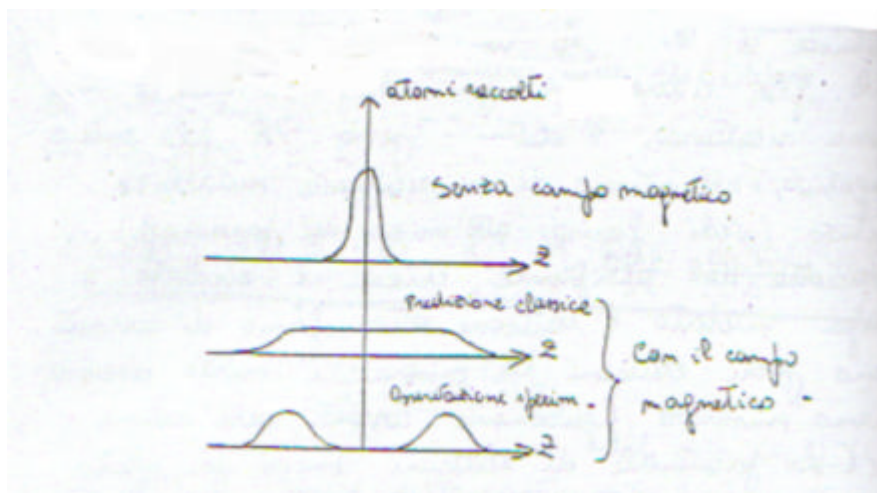
Per rivelare atomi neutri, comunque è molto più efficace il cosiddetto metodo del filo a caldo:



Un filo caldo può essere spostato lungo l'asse z per rilevare gli atomi di argento che vengono deflessi alle diverse quote. Supponiamo che un atomo di argento si depositi sul filo caldo. Se l'energia di estrazione di un elettrone dal materiale di cui è fatto il filo è maggiore dell'energia di ionizzazione dell'ultimo elettrone nell'atomo di argento, quest'ultimo ha una considerevole probabilità di passare, per effetto tunnel, dall'atomo di argento alle bande di conduzione del materiale che costituisce il filo. Lo ione Ag^+ d'altra parte, viene emesso dal filo caldo più velocemente di quanto non occorra perché possa ricattare l'elettrone perso. Il filo caldo, a potenziale negativo, è all'interno di un recipiente metallico a potenziale positivo (vedi figura all'inizio del paragrafo). Lo ione Ag , raccolto dal recipiente, chiude il circuito e consente che venga rivelato l'elettrone sotto forma di corrente. Anche se arrivano pochi elettroni, la misura è molto accurata perché possiamo misurare agevolmente correnti dell'ordine del nanoampere. (La percentuale di elettroni emessi per effetto termoelettrico è trascurabile rispetto al flusso di elettroni provenienti dall'atomo di Ag). Quali risultati possiamo aspettarci dall'esperienza descritta? La componente M_z del vettore momento magnetico di un atomo dipende dal suo orientamento rispetto all'asse \vec{z} e può essere positiva, negativa o nulla. Quando il vapore non è sottoposto ad un campo magnetico, la statistica classica predice che i vettori \vec{M} sono ugualmente distribuiti in tutte le direzioni cosicché tutti i valori di M_z sono ugualmente probabili. Durante un esperimento di Stern

e Gerlach ci si aspetterebbe di vedere gli atomi distribuiti uniformemente sullo schermo in una regione che si estende parallelamente alla direzione \vec{z} del campo magnetico, simmetrica attorno al punto di incidenza normale del fascio in assenza di campo magnetico. Le due estremità di questa regione devono corrispondere al massimo e al minimo valore di M_z .

Invece, quando Stern e Gerlach condussero i loro esperimenti con atomi di argento, essi non ottennero una regione uniforme, ma due macchie che erano simmetriche rispetto al punto di incidenza normale. Contrariamente alla predizione della statistica classica essi osservarono solo due valori di M_z . Se l'esperimento è condotto con altri atomi sono sempre osservate macchie separate corrispondenti a valori discreti della componente M_z . Le macchie sono sempre distribuite simmetricamente rispetto al punto di incidenza normale. Questo significa che i vettori del momento magnetico possono avere solo certe orientazioni nello spazio e non ogni orientazione. Questa è chiamata quantizzazione spaziale.



Quando abbiamo introdotto il momento angolare orbitale, abbiamo osservato che, per un fissato valore del numero quantico sono permessi $2l+1$ valori distinti di m ($-l \leq m \leq l$) cosicché se l è intero ci aspettiamo un numero dispari di valori possibili per m , ai quali corrisponde un numero dispari di valori distinti per L_z e dunque per M_z . Dall'esperienza di Stern e Gerlach invece, si deduce che i valori possibili di M_z sono solo due che è un numero pari. Interpretiamo questo risultato dicendo che oggetto della misura non è il momento angolare orbitale, (che per l'atomo di argento è nullo) ma una grandezza che ha tutte le caratteristiche di un momento angolare di spin o, semplicemente, spin. A questa grandezza, che nasce dalla rotazione dell'elettrone attorno a sé,

Questo è un esempio di come discorsi classici ci portino a fare affermazioni sbagliate in meccanica quantistica. Si parla di rotazione dell'elettrone attorno a se stesso "solo per dare una certa ideaa", ma non è assolutamente lecito parlarne come se fosse una cosa vera!

sono associati due numeri quantici, σ e s_z che si riferiscono rispettivamente al modulo quadro s^2 e alla componente lungo z , s_z , del momento angolare di spin. Dall'esperienza di Stern e Gerlach si deduce che $2\sigma+1=2$ da cui $\sigma=1/2$. Per questo valore di σ sono permessi i due valori di s_z

compresi fra σ e $-\sigma$. si ha dunque: $s^2 = \hbar^2 \mathbf{s}(\mathbf{s}+1) = \frac{3}{4} \hbar^2 \Rightarrow |s| = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

Ai due autovalori $\pm \frac{\hbar}{2}$ sono associati i due autostati $|s_{1/2}\rangle$ e $|s_{-1/2}\rangle$. Qualunque altro stato può scriversi come la loro combinazione lineare: $|s\rangle = a|s_{1/2}\rangle + b|s_{-1/2}\rangle$ dove $a = \langle s_{1/2}|s\rangle$ e $b = \langle s_{-1/2}|s\rangle$ e $\langle s_{1/2}|s_{1/2}\rangle = 1$, $\langle s_{1/2}|s_{-1/2}\rangle = 0$

Si definisce valor medio della componente di spin lungo \vec{z} nel generico stato s il seguente prodotto scalare: $\langle s|\hat{s}_z|s\rangle = \langle \langle s_{1/2}|\bar{a} + \langle s_{-1/2}|\bar{b}\rangle \hat{s}_z (a|s_{1/2}\rangle + b|s_{-1/2}\rangle) = \frac{\hbar}{2}(a\bar{a} - b\bar{b})$

Ovviamente è possibile definire gli operatori che corrispondono alla componente di spin lungo \vec{x} e lungo \vec{y} che indichiamo rispettivamente con \hat{s}_x e \hat{s}_y .

Nella base degli autostati di \hat{s}_z , i tre operatori \hat{s}_x , \hat{s}_y e \hat{s}_z sono rappresentati dalle seguenti matrici:

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

che sono le note matrici di Pauli.

N.B. daremo per note le proprietà degli operatori che rappresentano, negli opportuni spazi vettoriali, le variabili dinamiche, e le proprietà dei vettori che rappresentano gli stati fisici di un sistema. A tal proposito, rimandiamo al corso di istituzioni di fisica teorica.

Poiché accanto al momento angolare orbitale, abbiamo introdotto il momento di spin dobbiamo rivedere la relazione fra momento angolare e momento magnetico. Consideriamo una rappresentazione vettoriale (il modello vettoriale in alcuni casi può essere adottato anche se m , L , s non sono dei vettori; per esserlo, dovremmo conoscere direzione, modulo e verso, mentre conosciamo solo modulo e componente lungo una certa direzione). Nel caso del momento angolare orbitale abbiamo mostrato che vale la relazione: $\vec{m} = -\vec{g}\vec{L} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$

Per la componente lungo l'asse z , supponendo che $L_z = \hbar$, si ha: $m_z = -\frac{e}{2m}\hbar$

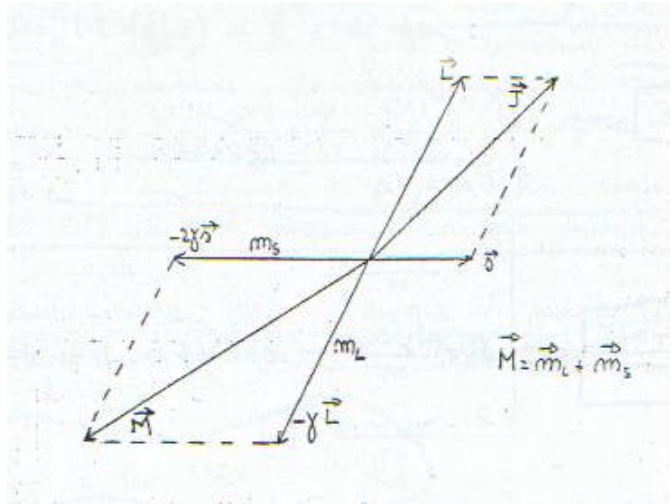
Nel caso del momento di spin dove valere una relazione di proporzionalità del tipo: $\vec{m} = -\vec{g}'\vec{s}$

Per la componente lungo l'asse z , supponendo che $s_z = \frac{\hbar}{2}$, si ha: $m_z = -\frac{e}{m}\frac{\hbar}{2} \Rightarrow \vec{g}' = \frac{e}{m} = 2\vec{g}$

Cioè, indicando con \vec{l} il momento angolare, vale sempre la relazione: $\vec{m} = -\vec{g}\vec{l}$

solo che la costante \vec{g} ha un valore se \vec{l} è orbitale, ne ha un altro (il doppio) se \vec{l} è di spin:

E' bene utilizzare sempre un certo tipo di formalismo. La lettera L fa riferimento al momento angolare orbitale, la lettera S allo spin e la lettera J alla loro somma o ad un momento angolare inteso genericamente (quando non sappiamo o non ci interessa se sia orbitale o di spin).



Il momento magnetico \vec{M} non è antiparallelo al momento angolare totale \vec{J} . Ciò ha conseguenze soprattutto in spettroscopia