

## MOMENTO ANGOLARE ORBITALE

vedi un qualsiasi testo di istituzioni di fisica teorica o di struttura della materia

Finora abbiamo trattato problemi unidimensionali. Nel trattare problemi tridimensionali è opportuno introdurre un'ulteriore grandezza fisica che è il momento angolare o momento della quantità di moto.

Nel caso unidimensionale, il momento angolare è nullo e quindi non lo consideriamo.

Classicamente il momento angolare è dato dal prodotto vettoriale di

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Quantisticamente il momento angolare è rappresentato, come una qualunque altra variabile dinamica osservabile, da un operatore  $\hat{L}$ . Assumiamo che la dipendenza funzionale dell'operatore  $\hat{L}$  dagli operatori  $\hat{r}$  e  $\hat{p}$  sia uguale a quella che lega il vettore  $\vec{L}$  ai vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$ .

Nella rappresentazione delle coordinate, in cui  $\hat{p} \equiv -i \cdot \hbar \vec{\nabla}$ , le tre componenti  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  ed  $\hat{L}_z$  del momento angolare assumono la forma:

$$\begin{cases} \hat{L}_x = -i \cdot \hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y = -i \cdot \hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z = -i \cdot \hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Si definisce modulo quadro del momento angolare il seguente operatore:

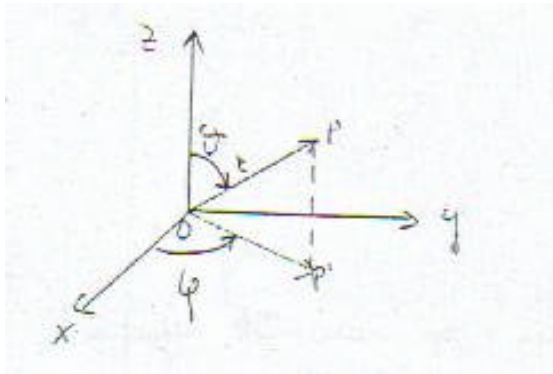
$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

E' facile verificare le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i \cdot \hbar \hat{L}_z \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i \cdot \hbar \hat{L}_x \\ [\hat{L}_x, \hat{L}_z] &= i \cdot \hbar \hat{L}_y \\ [\hat{L}^2, \hat{L}_x] &= [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \end{aligned}$$

Ricordando il significato delle parentesi di commutazione in meccanica quantistica, le prime tre relazioni ci informano che i tre operatori  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  ed  $\hat{L}_z$  non ammettono un set completo di autostati simultanei, cioè non è possibile misurare contemporaneamente le tre componenti del momento angolare orbitale con precisione assoluta. E' invece possibile determinare il modulo quadro ed una a piacere delle componenti dell'operatore  $\hat{L}$ , secondo quanto si deduce dall'ultima delle relazioni. L'unico caso in cui  $\hat{L}$  è determinabile completamente (nel modulo e nelle tre componenti) è quando  $\hat{L}_x = \hat{L}_y = \hat{L}_z = \hat{L}^2 = 0$ .

E' spesso conveniente lavorare in coordinate polari sferiche. Cerchiamo la forma dell'operatore  $\hat{L}$  in tale rappresentazione



$$\begin{cases} x = r \sin q \cos f \\ y = r \sin q \sin f \\ z = r \cos q \end{cases}$$

Vogliamo determinare la relazione tra  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  e  $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}$ .

Data una funzione  $f$  regolare, calcoliamo il suo valore in un punto  $P$  e in uno  $P+dP$  del suo dominio. La quantità  $df = f(P+dP) - f(P)$  di cui è variata la funzione andando da  $P$  a  $P+dP$  è ovviamente indipendente dal particolare sistema di coordinate usato:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \quad (2)$$

Osserviamo che

$$x = x(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$$

$$y = y(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$$

$$z = z(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$$

Si ha:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial x}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \quad (3)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \quad (4)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \quad (5)$$

Andando a sostituire le (3),(4),(5) nella (1) ed uguagliando la (1) alla (2) si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial x}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{f}} d\mathbf{f}$$

Equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \mathbf{f}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \end{cases} \quad (6)$$

Essendo note le funzioni  $x = x(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$ ,  $y = y(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$ ,  $z = z(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$ , sono note le derivate di x,y,z rispetto a  $r, \mathbf{q}, \mathbf{f}$ . Il sistema (6) è un sistema di tre equazioni in tre incognite  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  che possiamo risolvere con il metodo di Cramer ottenendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r^2 \sin \mathbf{q}} \left( r^2 \sin^2 \mathbf{q} \cos \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial r} - r \sin \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} + r \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} \cos \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r^2 \sin \mathbf{q}} \left( r^2 \sin^2 \mathbf{q} \sin \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial r} + r \cos \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} + r \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{r^2 \sin \mathbf{q}} \left( r \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial r} - r \sin^2 \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \end{cases}$$

Allora si ha:

$$\begin{cases} \hat{L}_x = -i\hbar \left( -\sin \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \cot \mathbf{q} \cos \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \right) \\ \hat{L}_y = -i\hbar \left( \cos \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} - \cot \mathbf{q} \sin \mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \right) \\ \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \end{cases}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \sin \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{q}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{f}^2} \right] = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} + \cot \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{q}} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{f}^2} \right)$$

Risolviamo l'equazione agli autovalori per  $\hat{L}_z$  scritta nella forma:

$$\hat{L}_z \mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) = L_{0z} \mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \quad (7)$$

Dove  $\mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$  è l'autofunzione e  $L_{0z}$  è l'autovalore. Osservando che  $\hat{L}_z$  agisce solo sulla variabile  $\mathbf{f}$ , l'autofunzione  $\phi$  si può scrivere separando le variabili come prodotto di una funzione

dipendente da  $r$  e  $\theta$  e di una funzione  $\hat{O}$  dipendente da  $\mathbf{f}$ :  $\mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{f}) f(r, \mathbf{q})$ . L'equazione (7) è perciò equivalente all'equazione:

$$-i\hbar \frac{d\Phi(\mathbf{f})}{d\mathbf{f}} = L_{0z} \Phi(\mathbf{f}) \Rightarrow \frac{d\Phi(\mathbf{f})}{\Phi(\mathbf{f})} = \frac{i}{\hbar} L_{0z} d\mathbf{f} \Rightarrow \Phi(\mathbf{f}) = A e^{\frac{i}{\hbar} L_{0z} \mathbf{f}}$$

Bisogna imporre che l'autofunzione sia monodroma e dunque che:

$$\Phi(\mathbf{f}) = \Phi(\mathbf{f} + 2\mathbf{p}) \Rightarrow A e^{\frac{i}{\hbar} L_{0z} \mathbf{f}} = A e^{\frac{i}{\hbar} L_{0z} (\mathbf{f} + 2\mathbf{p})} \Rightarrow 2\mathbf{p} \frac{i}{\hbar} L_{0z} = 2\mathbf{p} m \Rightarrow$$

$$L_{0z} = m\hbar \quad (8)$$

Essendo  $m$  un intero relativo. La relazione (8) mostra che la componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare è quantizzata, cioè può assumere solo determinati valori. Adesso scriviamo l'equazione agli autovalori per  $\hat{L}^2$ :

$$\hat{L}^2 \mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) = L^2 \mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \quad (9)$$

Dove  $L^2$  è il generico autovalore da determinare. Osservando che l'operatore  $\hat{L}^2$  agisce solo sulle coordinate  $\theta$  e  $\mathbf{f}$ . Si può supporre la seguente separazione di variabili:  $\mathbf{y}(r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) = R(r) F(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  per cui la(9) è equivalente a:

$$\hat{L}^2 F(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = L^2 F(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \quad (10)$$

Osservando che un'autofunzione di  $\hat{L}_z$  è anche autofunzione di  $\hat{L}^2$  a meno di un fattore di normalizzazione, possiamo scrivere:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = P(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}} \quad (11)$$

Sostituiamo la (11) nella (10) scrivendo l'operatore  $\hat{L}^2$  nelle coordinate sferiche:

$$-\hbar^2 \left[ \frac{d^2 P(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}}}{d\mathbf{q}^2} + \cot \mathbf{q} \frac{dP(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}}}{d\mathbf{q}} + \frac{1}{\sin^2 \mathbf{q}} \frac{d^2 P(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}}}{d\mathbf{f}^2} \right] = L^2 P(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 P(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}^2} + \cot \mathbf{q} \frac{dP(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} + \left( \mathbf{l} - \frac{m^2}{\sin^2 \mathbf{q}} \right) P(\mathbf{q}) = 0 \quad (12)$$

Dove si è posto  $L^2 = \mathbf{l}\hbar^2$ , con  $\mathbf{l}$  numero, si è calcolato  $\frac{d^2 P(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}}}{d\mathbf{f}^2} = -m^2 P(\mathbf{q}) e^{im\mathbf{f}}$  e si è semplificato per  $e^{im\mathbf{f}}$ . Soluzioni dell'equazione differenziale (12) sono i polinomi di Legendre in seno e coseno di vario grado. Discutiamo i seguenti casi:

a)  $P(\theta) = \text{costante}$

L'equazione (12) diventa:

$$\mathbf{l} - \frac{m^2}{\sin^2 \mathbf{q}} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{l} = m = 0$$

Questo è il caso in cui  $L=0$  e la funzione d'onda è una costante che non dipende dalle variabili angolari  $\theta$  e  $\mathbf{f}$ , cioè il sistema è a simmetria sferica. Le due circostanze ( $L=0$  e indipendenza da  $\theta$  e  $\mathbf{f}$ )

f) sono equivalenti. Se infatti  $L$  è diverso da zero ci sono delle direzioni o delle regioni dello spazio in cui è più probabile trovare la particella, precisamente la massima probabilità si ha nel piano normale alla direzione del momento angolare. Se  $L=0$ , invece, nessun piano è privilegiato e quindi dobbiamo trovare la particella ovunque con la stessa probabilità, cioè il sistema deve avere simmetria sferica.

b)  $P(\theta) = \sin \theta$

Sostituendo nella (12) si ha:

$$\begin{aligned}
 -\sin \mathbf{q} + \frac{\cos^2 \mathbf{q}}{\sin \mathbf{q}} + \left( \mathbf{l} - \frac{m^2}{\sin^2 \mathbf{q}} \right) \sin \mathbf{q} &= 0 \Rightarrow \\
 -\sin \mathbf{q} + \frac{1 - \sin^2 \mathbf{q}}{\sin \mathbf{q}} + \mathbf{l} \sin \mathbf{q} - \frac{m^2}{\sin \mathbf{q}} &= 0 \Rightarrow \\
 (-2 + \mathbf{l}) \sin \mathbf{q} + \frac{1 - m^2}{\sin \mathbf{q}} &= 0
 \end{aligned}$$

Devono annullarsi contemporaneamente i coefficienti di  $\sin \theta$  e  $1/\sin \theta$ , cioè:

$$\mathbf{l} = 2, \quad m = \pm 1$$

c)  $P(\theta) = \cos \theta$

Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned}
 -\cos \mathbf{q} - \cos \mathbf{q} + \left( \mathbf{l} - \frac{m^2}{\sin^2 \mathbf{q}} \right) \cos \mathbf{q} &= 0 \Rightarrow \\
 (-2 + \mathbf{l}) \cos \mathbf{q} - m^2 \frac{\cos \mathbf{q}}{\sin^2 \mathbf{q}} &= 0 \Rightarrow \\
 \forall \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{l} = 2, m = 0
 \end{aligned}$$

Osserviamo che allo stesso valore del modulo di  $L$  ( $L = \sqrt{2}\hbar$ ) corrispondono diverse componenti del momento angolare lungo  $z$  ( $L_z = \hbar, 0, -\hbar$ )

d)  $P(\theta) = \cos^2 \theta$

Si ha:

$$\frac{d \cos^2 \mathbf{q}}{d \mathbf{q}} = -2 \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q}; \quad \frac{d^2 \cos^2 \mathbf{q}}{d \mathbf{q}^2} = -2 \cos^2 \mathbf{q} + 2 \sin^2 \mathbf{q}$$

Pertanto la (12) diventa:

$$\begin{aligned}
 2 \sin^2 \mathbf{q} - 2 \cos^2 \mathbf{q} - 2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{l} \cos^2 \mathbf{q} - m^2 \tan^2 \mathbf{q} &= 0 \Rightarrow \\
 2 - 2 \cos^2 \mathbf{q} - 4 \cos^2 \mathbf{q} - m^2 \tan^2 \mathbf{q} &= 0 \Rightarrow \\
 2 + (\mathbf{l} - 6) \cos^2 \mathbf{q} - m^2 \tan^2 \mathbf{q} &= 0
 \end{aligned}$$

Se scegliamo  $\mathbf{l}=6$ ,  $m=0$  rimane al primo membro della relazione un 2. E' facile verificare che se si sceglie  $P(\theta) = \cos^2 \theta = 1/3$  la soluzione  $\mathbf{l}=6$ ,  $m=0$  è accettabile.

e)  $P(\theta) = \sin^2 \theta$

Si ha:

$$\frac{d \sin^2 \mathbf{q}}{d \mathbf{q}} = 2 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q}; \quad \frac{d^2 \sin^2 \mathbf{q}}{d \mathbf{q}^2} = -2 \sin^2 \mathbf{q} + 2 \cos^2 \mathbf{q}$$

pertanto la (12) diventa:

$$\begin{aligned}
2 \cos^2 \mathbf{q} - 2 \sin^2 \mathbf{q} + 2 \cos^2 \mathbf{q} + \mathbf{l} \sin^2 \mathbf{q} - m^2 &= 0 \Rightarrow \\
4 - 6 \sin^2 \mathbf{q} + \mathbf{l} \sin^2 \mathbf{q} - m^2 &= 0 \Rightarrow \\
(\mathbf{l} - 6) \sin^2 \mathbf{q} + 4 - m^2 &= 0 \\
\forall \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{l} = 6, m = \pm 2
\end{aligned}$$

f)  $P(\theta) = \cos \theta$  è  $\sin \theta$

Si ha:

$$\frac{d \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q}}{d \mathbf{q}} = -\sin^2 \mathbf{q} + \cos^2 \mathbf{q}$$

$$\frac{d^2 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q}}{d \mathbf{q}^2} = -2 \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} - 2 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} = -4 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q}$$

pertanto la (12) diventa:

$$\begin{aligned}
-4 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + \frac{\cos^3 \mathbf{q}}{\sin \mathbf{q}} - \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{q} + \mathbf{l} \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} - m^2 \frac{\cos \mathbf{q}}{\sin \mathbf{q}} &= 0 \Rightarrow \\
-5 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + \frac{\cos \mathbf{q}}{\sin \mathbf{q}} (1 - \sin^2 \mathbf{q}) + \mathbf{l} \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} - m^2 \tan \mathbf{q} &= 0 \Rightarrow \\
-6 \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + \tan \mathbf{q} + \mathbf{l} \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} - m^2 \tan \mathbf{q} &= 0 \Rightarrow \\
(\mathbf{l} - 6) \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{q} + (1 - m^2) \tan \mathbf{q} &= 0 \\
\forall \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{l} = 6, m = \pm 1
\end{aligned}$$

Procedendo in questo modo si trovano ancora le soluzioni  $\ell=12, \ell=20, \ell=30\dots$ . La generica soluzione in  $\ell$  può scriversi nella forma  $\ell=l(l+1)$  dove  $l$  è un numero intero maggiore uguale a zero,  $l$  è detto numero quantico del momento angolare orbitale. Generalizzando i risultati ottenuti si può dire che fissato  $l$  sono ammessi per  $l$  tutti i valori interi compresi fra  $-l$  ed  $l$ . Gli autovalori del modulo quadro e della componente lungo  $z$  del momento angolare sono dunque rispettivamente:

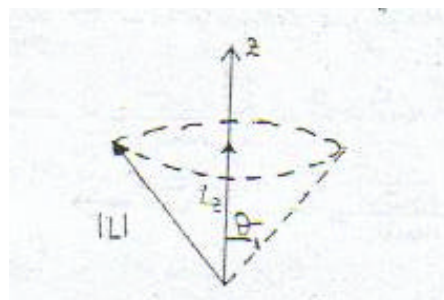
$$\begin{array}{ll}
\hbar^2 l(l+1) & l \geq 0 \\
\hbar m & -l \leq m \leq l
\end{array}$$

Le funzioni d'onda sono:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = P_{l,m}(\mathbf{q}) e^{imj} = Y_{l,m}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$$

dove  $P_{l,m}$  sono i già citati polinomi di Legendre. Le autofunzioni  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  si dicono armoniche sferiche.

Rappresentando in un diagramma polare  $|L|$  ed  $L_z$  si ha:



La proiezione  $L_z$  di  $L$ , fissato  $L^2$ , cioè fissato  $l$ , è di lunghezza massima:  $L_{z \max} = \hbar l$

Inoltre, non succede mai che  $L_z$  sia lungo quanto  $|L|$ , infatti:

$$|L| = \hbar \sqrt{l(l+1)} > \hbar l = L$$

perciò l'angolo è, semiapertura del cono, sulla cui superficie si può muovere il vettore  $\hat{L}$  è sicuramente non nullo. Ciò è in accordo con le regole di commutazione illustrate; se, infatti, potesse essere  $|L| = L_z$  avremmo le tre componenti di  $L$  perfettamente determinate e cioè  $L_z = |L|$ ,  $L_x = 0$ ,  $L_y = 0$  cosa che contraddice le regole di commutazione:

$$[L_z, L_x] = [L_y, L_z] = i\hbar L_{x,y}$$

secondo cui non è possibile determinare contemporaneamente  $L_x, L_y, L_z$ .

Poiché un asse non è privilegiato rispetto ad un altro è evidente che gli autovalori di  $L_x, L_y$  sono uguali (con opportuna ridefinizione degli angoli è  $\mathbf{f}$ ) agli autovalori ed autofunzioni di  $L_z$ .

Sia, ad esempio, il sistema preparato nell'autostato di  $\hat{L}_z$  in cui  $L_z = -\hbar$ . Se misuriamo non sappiamo quale sarà il risultato della specifica misura, però sappiamo che si tratterà di uno dei possibili autovalori di  $\hat{L}_x$ .

## Relazione tra momento angolare e momento magnetico

Una carica  $q$  si muova con velocità  $v$  su una circonferenza di raggio  $r$ . Tale moto può essere assimilato a quello di una corrente di intensità  $i = \frac{q}{T}$  su una spira circolare.

Alla carica pertanto associamo un momento magnetico

$$\vec{m} = i\vec{S} \quad (13)$$

dove  $\vec{S}$  è il vettore che ha direzione perpendicolare alla spira, verso individuato dal pollice della mano destra se le altre dita avvolgono la spira nel senso di moto della corrente, modulo pari all'area della spira.

Osservano che  $T = \frac{2\pi r}{v}$  la  $\vec{m} = i\vec{S}$  può anche scriversi:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{q}{T} \pi r^2 \vec{n} = \frac{q}{2\pi r} v \pi r^2 \vec{n} \Rightarrow \\ \vec{m} &= \frac{1}{2} \vec{r} \wedge q\vec{v} \end{aligned} \quad (14)$$

Si può dimostrare che la precedente relazione è generalizzabile ad un sistema di  $n$  cariche:

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \sum_n \vec{r}_n \wedge q_n \vec{v}_n .$$

Un fatto molto importante nello studio dei momenti magnetici atomici o molecolari è che essi sono legati ai corrispondenti valori della quantità di moto degli atomi o delle molecole. Per vederlo riprendiamo la (14), sostituiamo a  $q$  la carica  $-e$  di un elettrone, moltiplichiamo e dividiamo per la massa  $m$  dell'elettrone:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \vec{r} \wedge m\vec{v} = -\frac{e}{2m} \vec{L} \Rightarrow \\ \vec{m} &= -\mathbf{g}\vec{L} \end{aligned} \quad (15)$$

Essendo  $\vec{L}$  il momento angolare dell' elettrone lungo la sua orbita e  $\tilde{a}$  la costante  $\frac{e}{2m}$ .

Questo risultato, che è stato qui dedotto nell' ambito della meccanica classica e per il caso di un' orbita circolare è in realtà valido qualsiasi sia l' orbita percorsa dall' elettrone e resta valido anche nell' ambito della meccanica quantistica.

Se anziché un atomo di idrogeno abbiamo un sistema atomico più complesso, con più di un elettrone, il moto orbitale di ciascun elettrone dà luogo ad momento magnetico proporzionale al suo momento angolare secondo la (15). Poiché le orbite dei diversi elettroni si svolgono su piani diversi, tutti questi contributi dovranno essere sommati vettorialmente. Nella meccanica quantistica le regole per la somma di più vettori sono diverse da quelle della meccanica classica ma il risultato sarà sempre che per un atomo qualsiasi il momento magnetico dovuto al moto orbitale degli elettroni è proporzionale al momento angolare risultante secondo la (15)

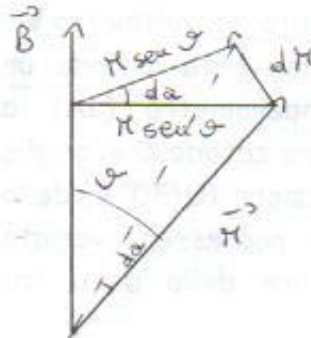
Sottoponiamo un sistema atomico ad un campo magnetico  $\vec{B}$ . Sul sistema di momento magnetico  $\vec{M}$  agisce una coppia  $\vec{\Gamma}$  che provoca la variazione del momento angolare secondo l'equazione:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Moltiplicando per  $-\tilde{a}$  la precedente espressione si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d(-\vec{g})}{dt} &= -\vec{g} = -\vec{gM} \wedge \vec{B} \Rightarrow \\ \frac{d\vec{M}}{dt} &= -\vec{gM} \wedge \vec{B} \quad (16) \end{aligned}$$

La differenza  $d\vec{M}$  del vettore  $\vec{M}$  in due istanti  $t$  e  $t+dt$  è un vettore ortogonale al piano formato da  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$ ; il risultato è che  $\vec{M}$  ruota attorno a  $\vec{B}$ :



Si ha :

$$\begin{aligned} |d\vec{M}| &= M \sin \theta J da = M \sin \theta J \omega dt \Rightarrow \\ \left| \frac{d\vec{M}}{dt} \right| &= M \sin \theta J \omega \Rightarrow \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{M} \quad (17) \end{aligned}$$

Confrontando la (16) e la (17) si ha:

$$\vec{\omega} = \vec{gB} \quad (18)$$

cioè  $\vec{\omega}$  ha la direzione di  $\vec{B}$ . La (18) esprime la precessione di Larmor, cioè il fatto che in presenza di campo magnetico i momenti magnetici ruotano con una velocità angolare che è proporzionale al campo magnetico applicato.

L'energia di interazione tra momento magnetico e campo magnetico è

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

Tal energia dipende dall'angolo tra  $\vec{M}$  e  $\vec{B}$ , ma, se  $\vec{M}$  precede  $\vec{B}$ , esso mantiene lo stesso angolo con  $\vec{B}$  e quindi il campo magnetico induce dei moti di precessione senza variare l'energia.

Vediamo ora cosa succede quando il campo magnetico non è uniforme. Se  $\vec{B}$  non è uniforme, nasce una forza sul sistema uguale all'opposto del gradiente dell'energia di interazione:

$$F = -\text{grad}U = -\text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B})$$

Supponiamo di disporre le linee di forza in modo che solo  $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$ , la forza esercitata è data da

$F_z = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$ . Abbiamo dimostrato che la proiezione del momento angolare lungo z è quantizzata.

Se si ha una quantizzazione per  $L_z$ , automaticamente si deve avere la stessa quantizzazione per la componente del momento magnetico lungo z perché c'è una relazione di proporzionalità tra momento magnetico e momento angolare. Se  $M_z$  è quantizzato lo è anche  $F_z$ . Esperienze opportune che mostrano la quantizzazione di  $F_z$  mettono in luce automaticamente la quantizzazione di  $L_z$ .

**Nota.** Nel trattare il momento angolare in struttura della materia bisogna essere sempre molto "prudenti" nell'adottare similitudini classiche o quello che viene chiamato modello vettoriale.