

## OSCILLATORE ARMONICO

Vedi un qualsiasi testo di istituzioni di fisica teorica o di struttura della materia, per la parte relativa agli operatori di creazione ed annichilazione (distruzione) vedi per es. il Cohen Tannoudji, "Quantum Mechanics"

Generalmente parlando, l'oscillatore semplice può essere usato per descrivere quasi ogni sistema in cui una grandezza sta eseguendo piccole vibrazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile.

Alla posizione di equilibrio stabile il potenziale  $V(x)$  dell'oscillatore armonico deve avere un minimo. Poiché ogni realistico potenziale è continuo, la funzione  $V(x)$  nella regione attorno al suo minimo può quasi sempre essere ben approssimata da una parabola. Se assumiamo che le origini dell'asse delle  $x$  e dell'asse delle energia sia al minimo, possiamo scrivere questo potenziale parabolico come

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

dove  $k$  è una costante.

Cerchiamo soluzioni asintotiche (cioè per  $x \rightarrow \infty$ ) dell'equazione di Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{y}''(x) + \frac{1}{2} kx^2 \mathbf{y}(x) = E \mathbf{y}(x)$$

Per  $x \rightarrow \infty$  la funzione d'onda  $\mathbf{y}(x)$  deve decrescere come  $e^{-ax}$ . In generale  $\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ . Nel

nostro caso il potenziale non è costante ma proporzionale a  $x^2$ :  $\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2m \cdot (\frac{1}{2} kx^2 - E)}}{\hbar}$ .

Per  $x$  molto grande si può trascurare  $E$  rispetto a  $\frac{1}{2} kx^2$  cosicché:  $\mathbf{a} = \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} x = \text{costante} \cdot x$ . Cioè

all'infinito la  $\mathbf{y}(x)$  è del tipo:  $\mathbf{y}(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ , essendo  $a$  una costante da determinare.

Per  $x \rightarrow \infty$  possiamo trascurare  $E \mathbf{y}$  rispetto a  $\frac{1}{2} kx^2 \mathbf{y}$  cosicché l'equazione di Schrodinger assume la

forma:  $\frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{y}''(x) = \frac{1}{2} kx^2 \mathbf{y}(x)$ .

Ricaviamo il valore di  $a$  andando a sostituire la soluzione asintotica  $\mathbf{y}(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$  nell'equazione di Schrodinger approssimata che abbiamo appena scritto:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-\frac{x^2}{2a^2}}) &= \frac{1}{2} kx^2 (e^{-\frac{x^2}{2a^2}}) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \left( -\frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \right) = \frac{1}{2} kx^2 (e^{-\frac{x^2}{2a^2}}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{1}{a^2} + \frac{x^2}{a^4} \right) e^{-\frac{x^2}{2a^2}} &= \frac{1}{2} kx^2 (e^{-\frac{x^2}{2a^2}}) \end{aligned}$$

Semplificando l'esponenziale e potendo trascurare  $\frac{1}{a^2}$  rispetto a  $\frac{x^2}{a^4}$ , poiché stiamo supponendo  $x \rightarrow \infty$ ,

si ha:  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{x^2}{a^4} = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow a^4 = \frac{\hbar^2}{mk} \Rightarrow a = \left( \frac{\hbar^2}{mk} \right)^{1/4}$ .

Le autofunzioni dell'oscillatore armonico allora contengono tutte il termine  $e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$  moltiplicato per una certa funzione di  $x$  dipendente dal particolare autovalore di energia:

$$\mathbf{y}(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \cdot f(x)$$

Vediamo perché. Riscriviamo l'equazione di Schroedinger per l'oscillatore armonico sostituendo a  $k$  il suo valore  $k = m\omega^2$  dalla nota relazione  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \mathbf{y}_n(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \mathbf{y}_n(x) = E_n \mathbf{y}_n(x)$$

essendo le  $\mathbf{y}_n$  autofunzioni associate agli autovalori  $E_n$ . Moltiplicando per  $\frac{2}{\hbar\omega}$ , otteniamo:

$$-\frac{\hbar}{m\omega} \frac{d^2 \mathbf{y}_n(x)}{dx^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \mathbf{y}_n(x) = \frac{2E_n}{\hbar\omega} \mathbf{y}_n(x)$$

Ponendo  $y = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$  ed  $\mathbf{e}_n = \frac{E_n}{\hbar\omega}$ , la suddetta equazione diventa infine:

$$-\frac{d^2 \mathbf{y}_n(y)}{dy^2} + y^2 \mathbf{y}_n(y) = 2\mathbf{e}_n \mathbf{y}_n(y)$$

e moltiplicando entrambi i membri per (-1):

$$\frac{d^2 \mathbf{y}_n(y)}{dy^2} - y^2 \mathbf{y}_n(y) = -2\mathbf{e}_n \mathbf{y}_n(y) \quad (1)$$

Definiamo adesso due operatori:

$$\hat{a}^+ = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dy} - y; \quad \hat{a}^- = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dy} + y.$$

$$\begin{aligned} (\hat{a}^- \hat{a}^+) \mathbf{y} &= \hat{a}^- \left( \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d\mathbf{y}}{dy} - y\mathbf{y} \right) = \left( \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dy} + y \right) \left( \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d\mathbf{y}}{dy} - y\mathbf{y} \right) = \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \frac{d^2 \mathbf{y}}{dy^2} - \mathbf{y} - y \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d\mathbf{y}}{dy} + y \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d\mathbf{y}}{dy} - y^2 \mathbf{y} = \\ &= \frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \frac{d^2 \mathbf{y}}{dy^2} - \mathbf{y} - y^2 \mathbf{y} \end{aligned}$$

Guardando la (1) otteniamo l'espressione:  $(\hat{a}^- \hat{a}^+) \mathbf{y}_n = (-2\mathbf{e}_n - 1) \mathbf{y}_n$ , avendo sottratto ad ambo i membri  $\mathbf{y}_n$ .

Analogamente risulta  $(\hat{a}^+ \hat{a}^-) \mathbf{y}_n = (-2\mathbf{e}_n + 1) \mathbf{y}_n$ .

Se la  $\mathbf{y}_n$  è soluzione delle ultime due equazioni agli autovalori, allora lo è anche  $\hat{a}^+ \mathbf{y}_n$ .

Infatti, se moltiplico a sinistra per l'operatore  $\hat{a}^+$  :

$$\hat{a}^+ (\hat{a}^- \hat{a}^+) \mathbf{y}_n = \hat{a}^+ (-2\mathbf{e}_n - 1) \mathbf{y}_n = (-2\mathbf{e}_n - 1) \hat{a}^+ \mathbf{y}_n$$

e, poiché l'operazione di moltiplicazione tra operatori gode della proprietà associativa, possiamo scrivere:

$$\hat{a}^+ \hat{a}^- (\hat{a}^+ \mathbf{y}_n) = (-2\mathbf{e}_n - 1) \hat{a}^+ \mathbf{y}_n, \text{ come volevasi dimostrare.}$$

$$\text{Ma } \hat{a}^+ \hat{a}^- (\hat{a}^+ \mathbf{y}_n) = (-2\mathbf{e}_n - 1) \hat{a}^+ \mathbf{y}_n = (-2 \cdot (\mathbf{e}_n + 1) + 1) \hat{a}^+ \mathbf{y}_n = (-2 \cdot \mathbf{e}'_n + 1) \hat{a}^+ \mathbf{y}_n$$

avendo posto  $\mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_n + 1$ .

Precedentemente avevamo trovato  $(\hat{a}^+ \hat{a}^-) \mathbf{y}_n = (-2\mathbf{e}_n + 1) \mathbf{y}_n$ , dunque  $\hat{a}^+ \mathbf{y}_n$  è autofunzione dell'operatore  $(\hat{a}^+ \hat{a}^-)$  associata all'autovalore  $\mathbf{e}_n + 1$ . In modo analogo se applico  $\hat{a}^-$  trovo l'autofunzione  $\hat{a}^- \mathbf{y}_n$  corrispondente all'autovalore  $\mathbf{e}_n - 1$ .

Pertanto chiamo

$\hat{a}^+$  operatore di creazione (aumenta l'energia di un fotone)

$\hat{a}^-$  operatore di distruzione (diminuisce l'energia di un fotone)

perché si parla di fotoni? l'oscillatore armonico non è legato esclusivamente ai fotoni!

Banalmente l'operatore  $\hat{a}^-$  applicato allo stato fondamentale  $\mathbf{y}_0(x)$  deve dare zero:

$$\hat{a}^- \mathbf{y}_0 = 0 \Rightarrow -2\mathbf{e}_0 + 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\hat{a}^+ \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_1, \text{ cui corrisponde l'autovalore } \mathbf{e}_1 = \frac{3}{2}$$

$$\hat{a}^+ \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2, \text{ cui corrisponde l'autovalore } \mathbf{e}_2 = \frac{5}{2}, \text{ etc.}$$

e ricordando che avevamo posto  $\mathbf{e}_n = \frac{E_n}{\hbar \omega}$ , possiamo scrivere l'autovalore dell'energia associato allo stato n come  $E_n = \hbar \omega \cdot \mathbf{e}_n = \hbar \omega \cdot (n + \frac{1}{2})$ .

Cerchiamo adesso l'espressione dell'autofunzione dello stato fondamentale  $\mathbf{y}_0(x)$ . Come detto deve essere:  $\hat{a}^- \mathbf{y}_0(x) = 0$  ovvero

$$\left( \frac{\hbar}{m\omega} + y \right) \mathbf{y}_0 = 0 \rightarrow \frac{\hbar \mathbf{y}_0}{m\omega} + y \mathbf{y}_0 = 0 \rightarrow \frac{\hbar \mathbf{y}_0}{m\omega} = -y \mathbf{y}_0 \rightarrow \ln \mathbf{y}_0 = -\frac{1}{2} y^2 + \text{costante} \rightarrow \mathbf{y}_0 = A e^{-\frac{1}{2} y^2}$$

Questa è una gaussiana. Sostituendo  $y = \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x$ , ritroviamo  $a^4 = \frac{\hbar^2}{mk}$  per cui in definitiva:

- $\mathbf{y}_0(x) = A e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}; \mathbf{e}_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega.$

$$\mathbf{y}_1 = \hat{a}^+ \mathbf{y}_0 = \left( \frac{\hbar}{m\omega} - y \right) \mathbf{y}_0 = \left( \frac{\hbar}{m\omega} - y \right) \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) = -2y e^{-\frac{y^2}{2}}, \text{ da cui, sostituendo la } y, \text{ troviamo:}$$

- $\mathbf{y}_1(x) = B \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}; E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$

E così continuando troviamo  $\mathbf{y}_2(x), E_2; \mathbf{y}_3(x), E_3; \text{ etc.}$

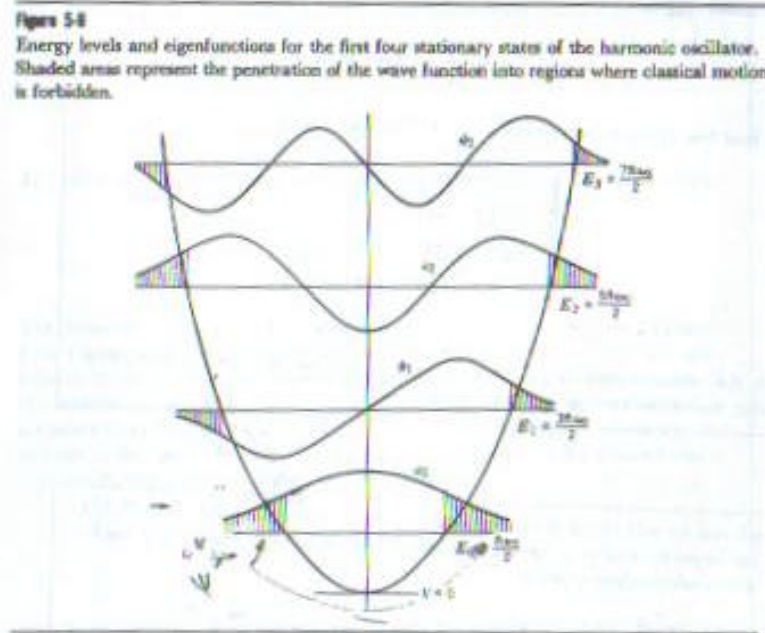
Sotto sono riportati i grafici, in funzione di z, del potenziale di oscillatore armonico e delle prime autofunzioni.

La funzione d'onda del primo stato, la  $\mathbf{y}_0(x)$ , è una gaussiana. Nella zona non tratteggiata il moto è classicamente concesso perché  $E \geq V_0$ .

La funzione  $\psi_1(x)$  è uguale alla prima moltiplicata per  $y=x$  cioè per una retta. A grandi distanze domina l'esponenziale. I punti di flesso sono individuati dalle intersezioni di  $E_1$  con  $V(x)$ .

La terza autofunzione è il prodotto di  $\psi_0(x)$  per una parabola  $y=-ax^2$ .

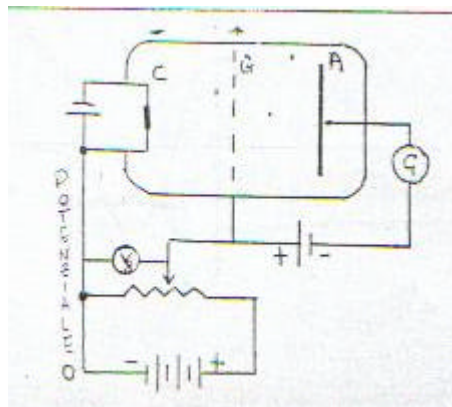
Osserviamo che tutte le autofunzioni sono simmetriche o antisimmetriche rispetto alla retta  $x=0$ , come conseguenza del fatto che esse sono prodotto di una funzione pari per una funzione che può essere pari o dispari (polinomio di grado  $n$ ).



## ESPERIENZA DI FRANCK ED HERTZ

Esempi di diffusione anelastica di elettroni, atomi e nuclei.

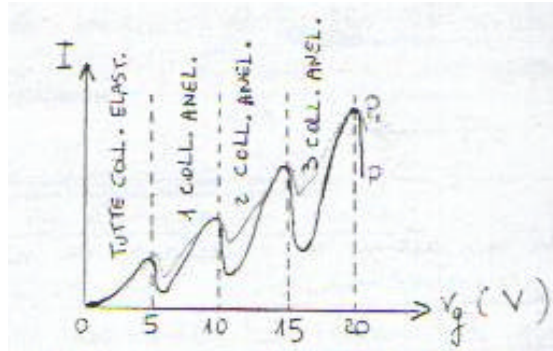
Nella figura seguente è schematizzato il dispositivo con cui F. ed H. dimostrarono la quantizzazione dell'energia.



La figura mostra un triodo costituito da un'ampolla di vetro su cui è stato fatto il vuoto. All'interno dell'ampolla è stata posta una goccia di mercurio. Un catodo, attraversato da corrente, emette elettroni per effetto termoelettrico; questi vengono accelerati da una differenza di potenziale  $V_g$  positiva tra il catodo e una griglia. La tensione  $V_g$  può variare tra 1V e 50V. Al di là della griglia viene posto un anodo mantenuto ad una d.d.p.  $V_g - \epsilon$  negativa rispetto alla griglia. Un galvanometro misura la corrente che passa all'anodo e un voltmetro la d.d.p. tra catodo e griglia.

Gli atomi di mercurio possono essere considerati fermi rispetto agli elettroni. La massa degli atomi di mercurio, inoltre, è assai più grande della massa degli elettroni. Possiamo allora considerare l'urto tra un elettrone e un atomo di mercurio come l'urto tra un proiettile assai leggero e un bersaglio fisso assai pesante: in queste condizioni l'elettrone può variare, anche del massimo, il suo impulso (va avanti, urta e torna indietro) ma conserva praticamente la sua energia cinetica. L'elettrone emesso dal catodo ha dunque energia sufficiente per superare il controcampo dopo la griglia e raggiungere l'anodo.

F. ed H. misurarono la corrente anodica in funzione della d.d.p. tra catodo e griglia. I risultati sperimentali sono presentati nel seguente grafico:



Come si vede, la corrente cresce al crescere della tensione ma in prossimità di 5 V subisce una brusca diminuzione; poi torna a crescere ma in prossimità di 10V subisce un nuovo calo repentino; la situazione si ripete a 15V, 20V..., cioè per valori di  $V_g$  multipli di 5V.

I cali di intensità possono essere spiegati supponendo collisioni anelastiche tra elettroni e atomi di mercurio. Tra 0 e 5 Volt l'elettrone urta elasticamente con gli atomi di mercurio, conservando la sua energia cinetica supera il controcampo di  $\epsilon$ , la corrente anodica aumenta al crescere di  $V_g$ . A 5 Volt l'elettrone cede quasi tutta la sua energia all'atomo di mercurio con cui ha urtato e non gliene rimane più per superare il controcampo e raggiungere l'anodo. L'energia persa dall'elettrone è servita per eccitare l'atomo di mercurio cioè far passare l'elettrone più esterno dallo stato fondamentale al primo livello eccitato.

Da 5 a 10 Volt l'elettrone può compiere un solo urto elastico; l'energia che gli rimane è sufficiente per raggiungere l'anodo, da qui l'aumento di I al crescere di  $V_g$  tra 5 e 10 Volt.

A 10V l'elettrone è in grado di subire due urti anelastici con due atomi di mercurio a ciascuno dei quali cede 5 eV. L'elettrone che ha subito tali due urti non può ovviamente raggiungere l'anodo. Da qui il calo di I intorno ai 10V. Supponendo 3, 4, ..collisioni anelastiche degli elettroni si spiegano i cali a 15V, 20V, etc.

Osserviamo però che i cali sono meno pronunciati al crescere di  $V_g$ . Capiamo, infatti, che la probabilità che un elettrone subisca n urti anelastici è tanto più piccola quanto più n è grande.

L'atomo di mercurio, eccitato dalla collisione anelastica con l'elettrone, torna allo stato di equilibrio emettendo luce.

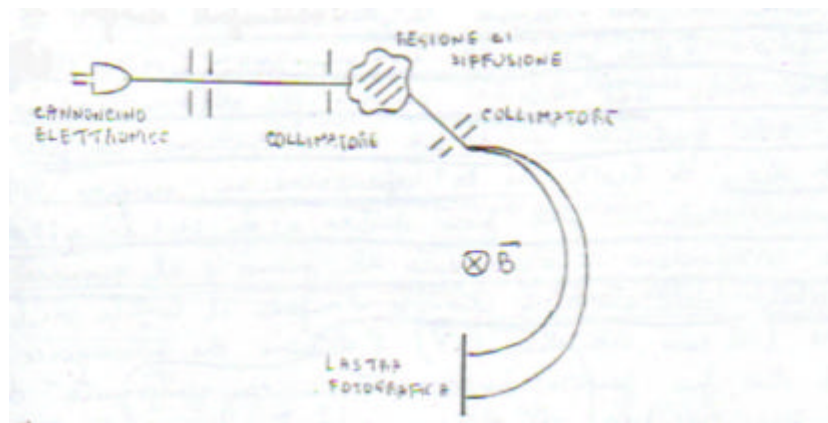
E' stata osservata tale emissione con una lunghezza d'onda  $\lambda=253.7$  nm.

Si ha:  $E_{ecc.Hg} - E_{fond.Hg} = \frac{hc}{\lambda}$ ,  $hc=1240$  eV· nm, da cui  $E_{ecc.Hg} - E_{fond.Hg} = \frac{1240}{253.7} eV = 4.9eV$ , che è il

valore atteso. Modificando opportunamente il dispositivo, Franck ed Einsporn ripeterono l'esperimento mostrando livelli energetici dell'atomo di mercurio più alti di quello a 4.9 eV.

L'esperienza di F. ed H. illustra un modo di procedere che serve, in generale, per evidenziare gli stati energetici discreti di un sistema qualsiasi, purché localizzato in una certa regione dello spazio e cioè l'interazione anelastica di particelle (con la giusta energia) con tali sistemi.

Ad esempio i vari livelli energetici dell'atomo di elio possono essere evidenziati con il seguente dispositivo:



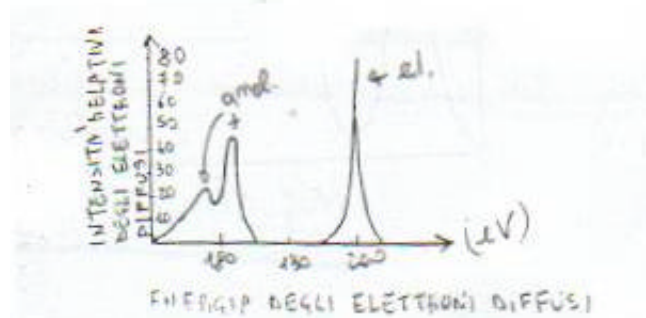
Un cannoncino emette elettroni accelerati fino ad 200 eV. Gli

elettronico che vengono una energia di elettroni vengono

fatti interagire con una regione di diffusione costituita nella fattispecie da atomi di elio. Un campo magnetico  $\vec{B}$  viene applicato oltre la regione di diffusione degli elettroni che pertanto vengono costretti su una traiettoria circolare e vengono rivelati su una lastra fotografica. Poiché  $\vec{B}$  è ortogonale al piano del moto

degli elettroni, il raggio della traiettoria verifica la relazione:  $evB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$ .

Fissati la carica, la massa e il campo magnetico, il raggio è funzione solo della velocità e quindi della radice quadrata dell'energia: maggiore è l'energia, maggiore è il raggio di curvatura della traiettoria degli elettroni diffusi. Possiamo rappresentare l'intensità relativa degli elettroni diffusi in funzione dell'energia della loro energia:



Il picco a 200 eV rappresenta gli urti elastici degli elettroni con gli atomi di elio: cambia la direzione ma non il modulo dell'impulso. I due picchi ad energie inferiori (circa 180 eV) rappresentano invece urti anelatici in cui gli elettroni hanno perso una certa quantità di energia nell'interazione con gli atomi di elio. Si trova che la separazione in energia dei due picchi anelatici dal picco elastico è di 21,1 eV e 23 eV, energie che corrispondono rispettivamente al primo e al secondo livello eccitato dell'atomo di elio. Se si supera il limite di ionizzazione (nel caso dell'elio 24 eV) l'elettrone che interagisce con l'atomo di elio può perdere energia cinetica con continuità da 176eV a 0, cedendola all'elettrone ionizzato che, essendo libero, può assumere qualsiasi valore di energia.

Con lo stesso procedimento ma aumentando opportunamente l'energia possiamo mettere in evidenza i livelli energetici dei nucleoni nel nucleo e dei quarks nei protoni. Ad esempio se gli elettroni hanno un'energia iniziale di 600 MeV e vengono fatti incidere su un campione di  $P_b^{208}$ , la maggior parte di essi verrà diffusa elasticamente ma si troveranno dei picchi ad energie più basse che differiranno da 600 MeV per qualche MeV e che ci danno i valori dei livelli energetici dei nuclei.

Per evidenziare poi i livelli energetici dei nucleoni stessi si dovranno utilizzare energie dell'ordine del GeV.

