

# 1 Radiazione Elettromagnetica

**2.1 Radiazione termica: descrizione sperimentale delle caratteristiche della radiazione e confronto con le deduzioni classiche. Ipotesi di Planck. Legge di Stefan Boltzmann e dello spostamento di Wien. Considerazioni termodinamiche sul corpo nero.**

Vedi per es.

Franchetti-Ranfagni-Mugnai pag. 65

Brehm-Mullin pag. 75

Haken-Wolf pag. 50

E' ben noto che se si pone il viso o il dorso della mano di fronte ad un corpo a temperatura elevata (per es. un ferro da stiro) si prova una sensazione di caldo: essa viene attribuita a radiazioni infrarosse emesse dal corpo che colpiscono la cute. La sensazione si fa più intensa al crescere della temperatura. Se questa raggiunge i 500°C il corpo diventa debolmente luminoso: il fenomeno si può seguire bene su un pezzo di ferro riscaldato da una fiamma a gas con eccesso d'aria (fiamma oscura) o su un filo percorso da corrente elettrica di intensità crescente. Il metallo appare prima rosso cupo, poi rosso più chiaro, arancione, ecc. sino a tendere al bianco, eventualmente a metallo fuso.

Un'analisi più approfondita mostra che si tratta di un fenomeno generale, che non è limitato alle temperature elevate. Ogni corpo a qualunque temperatura emette continuamente radiazioni elettromagnetiche; soltanto che al decrescere della temperatura decresce l'intensità di emissione e si limita a frequenze via via più basse. Questa forma di emissione di radiazione legata alla temperatura del corpo viene detta emissione termica.

L'energia persa per emissione termica può essere compensata in molte maniere. Il corpo che emette può essere esso stesso una sorgente di energia, come nel caso del sole; ovvero si può avere un rifornimento costante di energia elettrica dall'esterno, come nel caso del filamento di una lampadina elettrica. Se non ci sono sorgenti di energia di questi tipi, l'unico altro modo in cui un corpo può ricevere energia è tramite l'assorbimento di radiazioni dai corpi circostanti. Nel caso di un corpo circondato da altri corpi, l'energia interna del corpo (e dunque la temperatura) rimarrà costante se l'energia emessa per unità di tempo è uguale a quella assorbita.

Si chiama potere emissivo di un corpo l'energia radiante emessa al secondo per unità di area.

La radiazione termica si dice isotropa quando incide su un corpo nello stesso modo da tutte le direzioni. Una parte della radiazione può essere assorbita, una parte riflessa e una trasmessa. La frazione di radiazione isotropa incidente **di a** tutte le lunghezze d'onda che viene assorbita prende il nome di potere assorbente.

Riassumendo:

Potere emissivo =  $R$  = energia radiante totale emessa per *sec* per  $cm^2$  .

Potere assorbente =  $a$  = frazione dell'energia totale di una radiazione isotropa che viene assorbita.

All'equilibrio la quantità di energia emessa è uguale a quella assorbita in modo che la temperatura si mantenga costante, cioè :

$$aH = R \quad (2.1.1)$$

dove  $H$  è l'energia della radiazione incidente.

La 2.1.1 può essere scritta per le diverse lunghezze d'onda nel modo seguente:

$$a_1 dH = e_1 d\mathbf{I} \quad (2.1.2)$$

avendo indicato con  $e_1$  la quantità di energia emessa per unità di tempo, di area e di  $\mathbf{I}$ .

Dividendo ambo i membri della Equazione 2.1.1 per  $e_1 dH$  si ottiene:

$$\frac{a_1}{e_1} = \frac{d\mathbf{I}}{dH} = f(T) \quad (2.1.3)$$

Osserviamo che il secondo membro della 2.1.3 non dipende dal particolare materiale considerato ma solo dalla lunghezza d'onda  $\mathbf{I}$  e dalla temperatura  $T$ .

Ad una certa lunghezza d'onda  $\mathbf{I}$  il rapporto tra coefficiente di assorbimento (o potere assorbente)  $a_1$  e il coefficiente di emissione  $e_1$  è, indipendentemente dal materiale, considerato funzione della temperatura. In questo consiste la legge di Kirchhoff.

[ In realtà secondo lo Zemanski la legge di Kirchhoff espressa dall'equazione  $R = aR_B$  afferma che il potere emissivo  $R$  di un qualunque corpo ad una certa temperatura è pari ad una frazione del potere emissivo  $R_B$  di un corpo nero che si trovi a quella temperatura, tale frazione essendo rappresentata dal potere assorbente a quella temperatura.]

Il coefficiente di emissione  $e_1$  è legato al potere emissivo dalla :

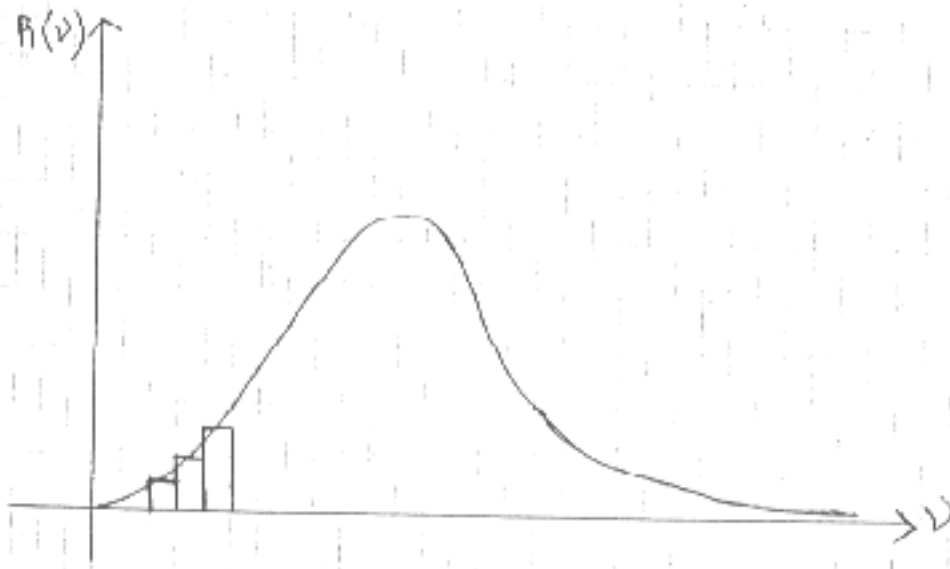
$$R_T = \int_0^{\infty} e_1 d\mathbf{I}$$

dove l'indice  $T$  è stato introdotto per sottolineare il fatto che  $R$  dipende dalla temperatura.

Alcune sostanze, come il nerofumo, hanno un potere assorbente molto prossimo ad uno. E' utile introdurre, a scopi teorici, una sostanza ideale capace di assorbire tutta la radiazione termica che incide su di essa. Tale corpo prende il nome di corpo nero. Indicando il corpo nero con l'indice  $B$ , possiamo scrivere  $a_B = 1$ .

Un dispositivo sperimentale che approssima ottimamente un corpo nero è costituito da una cavità le cui pareti interne siano mantenute a temperatura costante e che comunichi con l'esterno per mezzo di un foro di diametro piccolo rispetto alle dimensioni della cavità.

La radiazione incidente sul foro dall'esterno entra nella cavità ed è riflessa avanti e indietro dalle pareti della cavità, eventualmente essendo assorbita da queste pareti. Se l'area del foro è molto piccola in confronto all'area della superficie interna della cavità, una quantità trascurabile della radiazione incidente sarà riflessa indietro attraverso il foro. Essenzialmente tutta la radiazione incidente sul foro è assorbita; pertanto il foro deve avere le proprietà della superficie di un corpo nero. Le pareti interne, per via della loro temperatura, emetteranno radiazione termica che riempirà la cavità. La piccola frazione di questa radiazione incidente dall'interno sul foro passerà attraverso questo. Pertanto il foro agirà come emettitore di radiazione termica. Poiché il foro deve avere le proprietà della superficie di un corpo nero, la radiazione emessa dal foro deve avere uno spettro di corpo nero; ma poiché il foro sta semplicemente rappresentando la radiazione termica presente dentro la cavità, è chiaro che anche la radiazione nella cavità deve avere uno spettro di corpo nero. Disperdendo tale radiazione mediante un opportuno prisma si ottengono, per i vari intervalli di frequenza (non esistono radiazioni monocromatiche) ad una temperatura fissata, degli istogrammi che al limite  $\Delta n \rightarrow 0$ , tendono alla curva di distribuzione rappresentata in figura.



E' utile trovare una relazione tra il potere emissivo di un corpo nero ad una temperatura  $T$  e la densità di energia radiante all'interno di una cavità alla stessa temperatura.

Indichiamo con  $u$  tale densità di energia ( $u = \frac{\text{Energia}}{\text{Volume}}$ ) e con  $u_n$  la distribuzione spettrale di energia di questa radiazione. La funzione  $u_n$  è definita nel seguente modo:  $u_n d\mathbf{n}$  rappresenta la frazione di densità di energia elettromagnetica con frequenza compresa tra  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ . Il legame fra  $u$  e  $u_n$  è evidentemente

$$u = \int_0^{\infty} u_n d\mathbf{n}$$

Si può dimostrare che la distribuzione spettrale dell'energia  $u_n$  è una funzione universale che dipende solo dalla frequenza e temperatura della cavità, mentre è del tutto indipendente dalla natura delle pareti e dalla forma della cavità stessa. La dimostrazione di questa proprietà della  $u_n$  può essere effettuata mediante un semplice ragionamento termodinamico. Supponiamo di avere due cavità qualsiasi con pareti alla stessa temperatura  $T$ . Per essere sicuri che la temperatura rimanga costante possiamo immaginare le pareti della cavità in collegamento con due termostati a temperatura  $T$ . Supponiamo che ad una certa frequenza  $\mathbf{n}$  la densità di energia  $u_n'$  nella prima cavità sia superiore a quella  $u_n''$  della seconda cavità. Colleghiamo ora energeticamente le due cavità praticando due aperture in esse e focalizzando con un opportuno sistema ottico una apertura sull'altra. Nel sistema ottico inseriamo anche un filtro ideale che faccia passare una banda molto stretta di frequenze intorno alla frequenza  $\mathbf{n}$ . Se  $u_n' > u_n''$  ci sarà un flusso di energia elettromagnetica da 1 a 2. Tale flusso è però in contrasto col secondo principio della termodinamica essendo le due cavità alla stessa temperatura. Perciò dovrà essere  $u_n' = u_n''$  a qualsiasi frequenza. Poiché le orientazioni dei due corpi possono essere scelte ad arbitrio, si può concludere che le intensità non dipendono dalla direzione dell'angolo solido  $d\Omega$ . La radiazione all'interno dei due corpi cavi è dunque isotropa. Si può anche stabilire con considerazioni analoghe a quelle svolte che la radiazione non è polarizzata.

Consideriamo adesso all'interno di una cavità che si trova alla temperatura costante  $T$  una superficie di area  $\Delta S$ . Sia  $dV$  un elemento di volume, all'interno della cavità, che contiene l'energia:  $d\mathbf{e}' = u dV$ . Questo elemento di volume vede l'elemento di superficie  $\Delta S$  sotto un certo angolo solido  $d\Omega$ . La quantità di energia che incide su  $\Delta S$ , dovuta all'elemento  $dV$ , è pertanto:

$$d\mathbf{e} = u dV \frac{d\Omega}{4\mathbf{p}}$$

Nel tempo  $d\mathbf{t}$  la superficie  $\Delta S$  è attraversata da tutta l'energia contenuta in una semisfera di raggio  $c d\mathbf{t}$ , essendo  $c$  la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche.

Usando le coordinate polari si ha

$$d\mathbf{e} = \frac{u}{4\mathbf{p}} r^2 \sin \mathbf{J} d\mathbf{J} d\mathbf{j} dr \frac{\Delta S \cos \mathbf{J}}{r^2}$$

L'energia totale che attraversa  $\Delta S$  è data allora da

$$\Delta \mathbf{e} = \frac{u}{4\mathbf{p}} \Delta S \int_0^{2\mathbf{p}} d\mathbf{j} \int_0^{\mathbf{p}/2} \sin \mathbf{J} \cos \mathbf{J} d\mathbf{J} \int_0^{c\Delta t} dt = \frac{u\Delta S c \Delta t}{4\mathbf{p}} 2\mathbf{p} \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \mathbf{J} \right]_0^{\mathbf{p}/2} = \frac{1}{4} cu \Delta S \Delta t$$

da cui

$$R = \frac{\Delta \mathbf{e}}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} cu \quad (2.1.5)$$

che è la relazione cercata tra il potere emissivo di un corpo nero e la densità di energia in una cavità (entrambi alla stessa temperatura).

Determinata teoricamente la densità di energia  $u$  di una data cavità ad una fissata temperatura, è possibile confrontare il valore sperimentale di  $R$  con il valore che si deduce dalla 2.1.5. Abbiamo già osservato che  $u$  è indipendente dal particolare tipo di cavità perciò è conveniente considerare una cavità cubica a pareti metalliche di lato  $L$ .

In base alle equazioni di Maxwell il campo elettrico  $\vec{E}(x, y, z, t)$  deve soddisfare alla equazione delle onde

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.6)$$

La 2.2.6 è ovviamente una equazione vettoriale valida per ciascuna delle sue componenti. A questa equazione bisogna aggiungere le seguenti equazioni al contorno

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \quad \text{per} \quad y = 0, L; z = 0, L \\ E_y &= 0 \quad \text{per} \quad x = 0, L; z = 0, L \\ E_z &= 0 \quad \text{per} \quad x = 0, L; y = 0, L \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

che esprimono l'annullarsi della componente tangenziale del campo elettrico sulle pareti della cavità

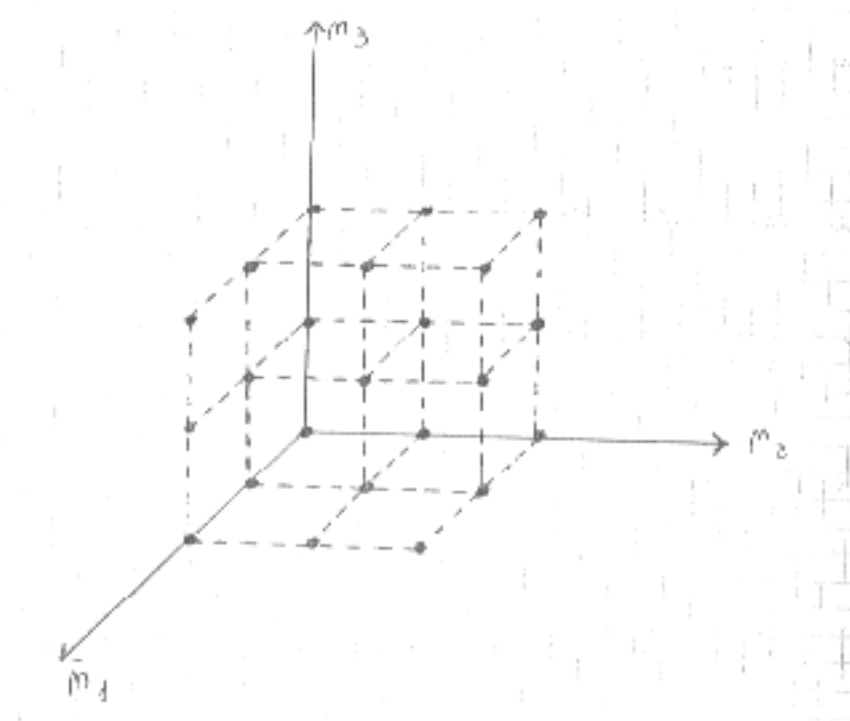
Si può dimostrare che soluzioni della 2.1.6 con le condizioni al contorno date dalle 2.1.7 sono le funzioni:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \sin \frac{n_1 \mathbf{p}x}{L} \cos \frac{n_2 \mathbf{p}y}{L} \sin \frac{n_3 \mathbf{p}z}{L} \sin 2\mathbf{p}t \\ E_y &= E_{0y} \cos \frac{n_1 \mathbf{p}x}{L} \sin \frac{n_2 \mathbf{p}y}{L} \sin \frac{n_3 \mathbf{p}z}{L} \sin 2\mathbf{p}t \\ E_z &= E_{0z} \sin \frac{n_1 \mathbf{p}x}{L} \sin \frac{n_2 \mathbf{p}y}{L} \cos \frac{n_3 \mathbf{p}z}{L} \sin 2\mathbf{p}t \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Sostituendo ad esempio la soluzione  $E_x$  nella 2.1.6 si ottiene la seguente relazione:

$$\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \frac{2L}{c} \mathbf{n} \quad (2.1.9)$$

Ogni soluzione della 2.1.6 con le condizioni al contorno già discusse si definisce modo della cavità. Essa corrisponde ad una configurazione spaziale stazionaria di campo e.m. nella cavità. I numeri  $n_1, n_2$  e  $n_3$  sono interi positivi arbitrari. Il loro significato fisico è immediato: essi rappresentano i ventri che l'onda stazionaria in questione presenta lungo le direzioni  $x, y, z$  rispettivamente. Fissata la terna  $n_1, n_2$  e  $n_3$  rimane determinata, in base alla 2.1.9, la frequenza  $\mathbf{n}$  del modo. Ci proponiamo ora di calcolare il numero di modi  $N_n d\mathbf{n}$  risonanti nella cavità e di frequenza compresa tra  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ . Introduciamo un sistema di assi cartesiani di coordinate  $n_1, n_2, n_3$ . C'è un'ovvia corrispondenza biunivoca tra i possibili valori di  $\mathbf{n}$  e i punti nodali del reticolo rappresentato nella figura seguente.



La cella elementare del reticolo ha volume unitario e possiede l'equivalente di un punto nodale giacché ogni punto nodale appartiene in effetti a otto celle contemporaneamente. La densità dei punti nodali è dunque unitaria. Giacché  $n_1, n_2$  e  $n_3$  sono quantità positive dobbiamo limitare le nostre considerazioni ai punti del reticolo che cadono nell'ottante positivo. Il numero  $N_n d\mathbf{n}$  è pertanto uguale ad un ottavo del guscio sferico di centro l'origine e raggi  $r$  e  $r + dr$ , essendo

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \frac{2L}{c} \mathbf{n} \quad \text{e}$$

$$dr = \frac{2L}{c} d\mathbf{n}$$

Si ha cioè

$$N_n d\mathbf{n} = \frac{1}{8} 4\mathbf{p}^2 dr = \frac{4\mathbf{p}L^3}{c^3} \mathbf{n}^2 d\mathbf{n}$$

In effetti dobbiamo correggere il numero trovato moltiplicandolo per due, giacché per ciascuna delle frequenze permesse ci sono due onde indipendenti che corrispondono ai due possibili stati di polarizzazione della radiazione e.m.

In definitiva abbiamo,

$$N_n d\mathbf{n} = \frac{8\mathbf{p}L^3}{c^3} \mathbf{n}^2 d\mathbf{n} \quad (2.1.10)$$

dove  $V = L^3$  è il volume della cavità

Calcoliamo ora l'energia media associata a ciascuno dei modi risonanti nella cavità. Per giungere a questo si può osservare che la radiazione si trova in equilibrio con le pareti e coi corpi eventualmente presenti nella cavità e che, secondo quanto è stato stabilito in base considerazioni termodinamiche, lo stato di equilibrio è del tutto indipendente dalla natura delle proprietà specifiche delle pareti e dei corpi. Nulla vieta perciò di attribuire a questi delle proprietà particolari, costruendo un modello che renda possibile il calcolo della distribuzione di energia.

Si immagina così che le pareti contengano degli oscillatori armonici, cioè dei dipoli capaci di oscillare ciascuno su una delle frequenze  $\mathbf{n}$  presenti nel campo di radiazione. Questi oscillatori assorbono ed emettono le radiazioni e si trovano in equilibrio con esse, a regime, in rapporto con le intensità rispettive. Ma gli oscillatori sono, d'altronde, dei sistemi meccanici costituiti da particelle cariche che compiono un moto di va e vieni lungo una direzione determinata, con una data energia cinetica e potenziale. E come sistemi meccanici essi interagiscono con le molecole presenti nella cavità ed acquistano la distribuzione d'energia di queste: varrà per essi il teorema di equipartizione dell'energia. Ne consegue che ogni oscillatore avendo un grado di libertà deve possedere energia cinetica media  $\frac{k_B T}{2}$ ; e poiché nell'oscillatore armonico i valori medi dell'energia potenziale e dell'energia cinetica sono uguali, si conclude che l'energia totale dell'oscillatore associato alla radiazione avrà il valor medio

$$\bar{E} = k_B T$$

lo stesso per tutte le frequenze.

Saremmo potuti giungere allo stesso risultato osservando che secondo la statistica di Boltzmann la probabilità  $dp$  che l'energia di un certo modo della cavità sia compresa tra  $E$  ed  $E + dE$  è data da

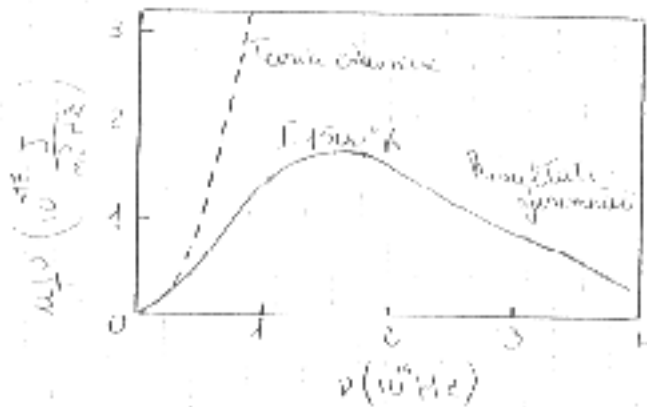
$dp = c e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$  dove  $c$  è una costante di normalizzazione. L'energia media  $\bar{E}$  del modo vale quindi

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE} = \frac{\left[ -k_B T E \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}} \right]_0^{\infty} + k_B T \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE} = \frac{k_B T \int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{k_B T}} dE} = k_B T$$

La densità di energia  $u_n$  si ottiene moltiplicando il numero di modi per unità di volume e per unità di frequenza  $N_n$  per l'energia media  $\bar{E}$  di ciascun modo. Quindi:

$$u_n = \left( \frac{8\mathbf{p}n^2}{c^3} \right) k_B T \quad (2.1.11)$$

dove  $\frac{8p^2}{c^3} = \frac{N_v dv}{V dv}$ . Questa è la formula classica di irraggiamento di Rayleigh-Jeans. Essa però è completamente in disaccordo con i risultati sperimentali.



In figura confrontiamo le predizioni dell'equazione 2.1.11 (linea tratteggiata) con i risultati sperimentali (linea continua) per la densità di energia di una cavità di corpo nero. La discrepanza è evidente. Nel limite delle basse frequenze lo spettro classico approssima i risultati sperimentali, ma, appena la frequenza cresce, la predizione teorica va ad infinito. L'esperimento mostra che la densità di energia rimane sempre finita, come ovviamente deve essere, e che la densità va a zero a frequenze molto alte. L'irrealistico comportamento della predizione della teoria classica ad alte frequenze è conosciuta come la "catastrofe ultravioletta".

Il problema rimase a lungo insoluto finché agli inizi del secolo Planck non introdusse l'ipotesi dei quanti di luce o fotoni. L'ipotesi fondamentale di Planck fu che l'energia  $E$  di un determinato modo della cavità non potesse avere un qualsiasi valore, variando con continuità da 0 a  $\infty$ , ma che essa dovesse variare di multipli di una certa quantità fondamentale proporzionale alla frequenza  $\nu$  del modo. In parole più brevi Planck ammise che l'energia del modo potesse essere scritta come  $E = nh\nu$ , dove  $n$  è un intero positivo e  $h$  è la costante di Planck. Sotto tale ipotesi l'energia media del modo vale

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}}} = \frac{d}{d\left(\frac{1}{k_B T}\right)} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{k_B T}} = \frac{d}{d\left(\frac{1}{k_B T}\right)} \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}} = \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right) \cdot \left[ \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Tale formula differisce sostanzialmente dal risultato classico. Se però è  $\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1$ , cioè per frequenze molto basse, possiamo fare la seguente approssimazione:

$$\bar{E} \approx \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1} = k_B T$$

con uno sviluppo in serie di  $e^{\frac{hn}{k_B T}}$  arrestato al primo termine, cioè a basse frequenze ritroviamo il risultato classico.

La densità di energia  $u_n$  è data da:

$$u_n = \frac{8\pi n^2}{c^3} \cdot \bar{E} = \frac{8\pi n^2}{c^3} \cdot k_B T = \frac{8\pi n^2}{c^3} \frac{hn}{e^{\frac{hn}{k_B T}} - 1} \quad (2.1.12)$$

La 2.1.12, nota come formula di Planck, risulta in perfetto accordo con i dati sperimentali. L'ottimo accordo dell'espressione trovata da Planck coi risultati sperimentali non è certo sufficiente a garantire la validità delle ipotesi di partenza. Occorse molto tempo, e molte verifiche indipendenti, prima che l'ipotesi dei quanti finiti di energia fosse precisata e definitivamente accettata. Bisogna rilevare d'altra parte che l'impostazione del calcolo di Planck, fondato in parte sulla fisica classica, in parte sulla nuova ipotesi, non è oggi considerato soddisfacente, nonostante la bontà del risultato. Una trattazione coerente si fonda sull'applicazione della legge statistica di Bose-Einstein, al gas di fotoni  $hn$ , in equilibrio nella cavità, legge statistica che si applica in quanto i fotoni si comportano come particelle di spin 1.

Dalla 2.1.5 e dalla 2.1.12 ricaviamo l'espressione del potere emissivo specifico:

$$R_n = \frac{2\pi n^2}{c^2} \frac{hn}{e^{\frac{hn}{k_B T}} - 1}$$

Integrando tale espressione rispetto a  $n$  da 0 a  $\infty$  si ottiene

$$R = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{n^3}{e^{\frac{hn}{k_B T}} - 1} dn = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4 = sT^4 \quad (2.1.13)$$

dove  $s = 5.670 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

La proporzionalità di  $R$  a  $T^4$  fu ricavata sperimentalmente da Stefan nel 1879 dai dati sperimentali e dedotta teoricamente da Boltzmann nel 1884 su basi termodinamiche: perciò la 2.1.13 va sotto il nome di legge di Stefan-Boltzmann.

Il massimo della curva del potere emissivo specifico si può determinare eguagliandone a zero la derivata. Si preferisce considerare l'espressione in funzione di  $\mathbf{l}$ :

$$\begin{aligned} R_l = -R_n \frac{dn}{d\mathbf{l}} &= -\frac{2\pi n^2}{c^2} \frac{hn}{e^{\frac{hn}{k_B T}} - 1} \frac{d}{d\mathbf{l}} \left( \frac{c}{\mathbf{l}} \right) = -\frac{2\pi c^2}{c^2 \mathbf{l}^2} \frac{h}{e^{\frac{hn}{k_B T}} - 1} \frac{c}{\mathbf{l}} \left( -\frac{c^2}{\mathbf{l}^2} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_l = \frac{2\pi h c^2}{\mathbf{l}^5} \frac{1}{e^{\frac{hn}{k_B T}} - 1} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

che, derivata rispetto a  $\mathbf{l}$  ed eguagliata a zero, porta all'equazione trascendente:

$$\frac{hc}{k_B T \mathbf{l}} = 5 - e^{-\frac{hc}{k_B T \mathbf{l}}} \Leftrightarrow e^{-x} + x = 5$$

Risolviendo numericamente questa equazione si ottiene

$$x_M = \frac{hc}{k_B T \lambda_M} = 4.965$$

$$T \lambda_M = \frac{hc}{4.965 k_B} = \text{cost} = 0.2897 \times 10^{-2} \text{ } ^\circ K$$

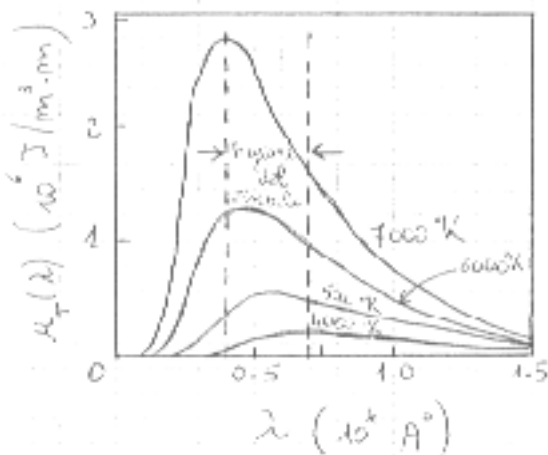
Il massimo potere emissivo specifico  $R_{IM}$  alla temperatura  $T$  si verifica per la lunghezza d'onda  $\lambda_M = 0.2897 \times 10^{-2} / T$ . Esso si sposta verso le lunghezze d'onda minori al crescere della temperatura, in ragione inversa di  $T$  (1<sup>a</sup> legge di Wien, dello spostamento). Il valore massimo

$R_{IM}$  si esprime in funzione di  $T$  introducendo  $\lambda_M = \frac{hc}{k_B T x_M}$  in 2.1.14. Risulta

$$R_{IM} = \frac{2k_B^5 x_M^5}{h^4 c^3 (e^{x_M} - 1)} T^5 = a T^5 \quad (2.1.15)$$

con  $a = 12.9 \times 10^{-6} \frac{W}{m^3 K^5}$  (2<sup>a</sup> legge di Wien)

Le due leggi espresse da 2.1.14 e 2.1.15 sono state ricavate da Wien sulla base di considerazioni termodinamiche ed elettromagnetiche, indipendentemente dalla legge di Planck. Il Wien non fu però in grado di assegnare i valori delle costanti: determinate sperimentalmente esse risultarono in pieno accordo coi valori teorici che derivano dalla legge di Planck. La figura illustra bene la legge di Stefan-Boltzmann e le due leggi di Wien.



## 2.2 Emissione spontanea ed emissione indotta

Vedi per es.

Haken-Wolf pag. 54

Brehm-Mullin pag.170

Cagnac-Pebay-Peyroula pag. 80 (parte di un capitolo tutto dedicato alla Probabilità di Transizioni Radiative, pag. 65)

La differenza fra due livelli energetici, secondo la meccanica quantistica, deve essere sempre pari ad un multiplo di  $h\nu$ ; pertanto per due livelli contigui,  $E_1$  ed  $E_2$ ,  $E_2 < E_1$ , risulta:  $E_2 - E_1 = h\nu = \hbar\omega$ . Quando un sistema passa da  $E_1$  ad  $E_2$  si ha il processo di assorbimento, nel caso inverso quello di emissione. Quest'ultimo può essere sia spontaneo che indotto (da radiazioni elettromagnetiche). La

probabilità che un sistema occupi un determinato livello energetico è:  $W_n = p_n \cdot e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ . Chiamiamo  $dW$  la probabilità di emissione nel tempo  $dt$ . Essa è uguale a

$$dW = A_m^n \cdot dt \quad (2.2.1)$$

Se nel livello  $E_2$  la popolazione è  $n_2$ , a causa della emissione essa diminuisce secondo la legge:

$\frac{dn_2}{dt} = -A_m^n \cdot n_2$ . In modo analogo alla 2.2.1 la probabilità di assorbimento nel tempo  $dt$  è:

$dW = B_n^m \cdot u_n dt$ . La condizione di equilibrio si ha quando il numero di transizioni dal livello  $n \rightarrow m$  è uguale a quello dal livello  $m \rightarrow n$ , con  $n < m$ . Per esprimere il numero di transizioni nell'unità di

tempo da  $n$  ad  $m$ , abbiamo solo un termine di assorbimento:  $p_n \cdot e^{-\frac{E_n}{k_B T}} B_n^m \cdot u_n dt$ ; mentre, se consideriamo il numero di transizioni da  $m$  ad  $n$ , abbiamo un termine di emissione spontanea  $A_m^n$  e

uno di emissione indotta  $B_m^n$ :  $p_m \cdot e^{-\frac{E_m}{k_B T}} B_m^n \cdot u_n dt + p_m \cdot e^{-\frac{E_m}{k_B T}} A_m^n \cdot dt$ . All'equilibrio abbiamo dunque l'uguaglianza:

$$p_n \cdot e^{-\frac{E_n}{k_B T}} B_n^m \cdot u_n dt = p_m \cdot e^{-\frac{E_m}{k_B T}} B_m^n \cdot u_n dt + p_m \cdot e^{-\frac{E_m}{k_B T}} A_m^n \cdot dt \quad (2.2.2)$$

Se  $T \rightarrow \infty$ ,  $u_n$  cresce e il secondo addendo a destra dell'uguaglianza si può trascurare. Risulta allora

$p_n \cdot B_n^m = p_m \cdot B_m^n$ , che, sostituita nella 2.2.2, dà  $u_n = \frac{A_m^n / B_m^n}{e^{\frac{E_m - E_n}{k_B T}}}$ , essendo  $E_m - E_n = h\nu$ . Ovvero  $\frac{A_m^n}{B_m^n} =$

$\frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$ , essendo  $u_n \propto \nu^3$ . Rappresentando  $A_m^n$  l'emissione spontanea e  $B_m^n$  quella indotta,

dalla relazione si vede che all'aumentare della frequenza  $\nu$ , si ha una prevalenza dell'emissione spontanea su quella indotta. Se abbiamo cioè una certa emissione spontanea da  $E_m$  ad  $E_n$  e inviamo su  $E_m$  una radiazione elettromagnetica con una certa frequenza  $\nu$ , notiamo l'aumento delle transizioni da  $E_m$  ad  $E_n$  (in ciò consiste l'emissione indotta). Ad alte frequenze, per quanto dimostrato, prevale però molto di più l'emissione spontanea.

### 2.3 Calore specifico del corpo nero

È definito nel seguente modo:

$$c_s = \frac{du}{dT}$$

con  $u$  densità volumetrica di energia dentro una cavità di corpo nero alla temperatura  $T$ .

Osserviamo che, essendo  $u \propto T^4$ , allora si ha  $c_s \propto T^3$ .

## 2.4 Radiazione di fondo dell'universo

Secondo le moderne teorie cosmologiche, dal momento del big bang, ossia della grande esplosione di energia localizzata in un punto, l'universo si espande necessariamente in ogni direzione.

Inizialmente la temperatura dell'universo è elevatissima, dell'ordine di miliardi e miliardi di Kelvin. Man mano che l'universo si espande, si hanno condensazioni e si formano i nucleoni. L'espansione è ovviamente accompagnata dal raffreddamento dell'universo (la stessa quantità di energia deve distribuirsi in uno spazio più grande, dunque la densità di energia diminuisce). Fin quando la temperatura si mantiene sufficientemente alta c'è interazione con scambio di energia all'equilibrio, tra la radiazione elettromagnetica e la materia. Si formano gli aggregati di materia (H, altri atomi, etc.) ma la temperatura si è abbassata a tale punto da impedire l'interazione energetica della radiazione elettromagnetica con la materia: i salti di energia sono troppo alti. Da questo momento in poi, dunque, la radiazione elettromagnetica segue l'espansione dell'universo senza più interagire con la materia.

Secondo un principio cosmologico, la velocità con cui due galassie si allontanano è proporzionale alla loro distanza. Consideriamo un sistema di galassie a pari distanza  $d$ .



A parità di distanza la velocità di allontanamento deve essere la stessa. Se siamo in B vediamo muoversi A e C in senso opposto con velocità  $\vec{v}$ , D si muove con velocità  $2\vec{v}$  e E con velocità  $3\vec{v}$ .



Se invece siamo in C ci si presenta la seguente situazione:



L'espansione è dunque uniforme in ogni punto dell'universo. La costante di Hubble che dipende dalle dimensioni e dall'età dell'universo, dà la velocità di allontanamento di due galassie in funzione della loro distanza.

Essa è uguale a  $15 \frac{Km}{s}$  ogni  $10^6$  anni luce. Quindi due galassie distanti  $10^6$  anni luce si spostano

con una velocità di  $15 \frac{Km}{s}$ .

Considerato l'universo come una cavità in espansione, la radiazione elettromagnetica che lo permea, residuo del big bang, deve essere una radiazione di corpo nero.

Vogliamo determinare l'andamento della densità volumetrica di energia per lunghezza d'onda in funzione della temperatura, vale a dire in funzione della espansione.  
Dalla 2.1.5 e dalla 2.1.8 si ricava che

$$u_1 d\mathbf{l} = \frac{8\mathbf{p}hc}{\mathbf{l}^5} \frac{1}{e^{hc/K_B T} - 1} d\mathbf{l}$$

e quindi  $U = \int_0^\infty u_1 d\mathbf{l} \cong 7,56 \cdot 10^{-15} [T]^4 \text{ erg/cm}^3$ . Possiamo calcolare anche il numero di fotoni con

lunghezza d'onda compresa tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  per unità di volume:  $dN = \frac{u_1 d\mathbf{l}}{hc/\mathbf{l}} = \frac{8\mathbf{p}d\mathbf{l}}{\mathbf{l}^4} \cdot \frac{1}{e^{hc/\mathbf{l}K_B T} - 1} e$ ,

integrando:

$N = \int dN = \int \frac{u_1 d\mathbf{l}}{hc/\mathbf{l}} = 20,28 [T]^3 \text{ fotoni/cm}^3$ . Infine l'energia media associata al singolo fotone è:

$$E_m = \frac{U}{N} \cong 3,73 \cdot 10^{-6} [T] \text{ erg}$$

Sia  $f$  il fattore di espansione dell'universo. Anche la generica lunghezza d'onda  $\mathbf{l}$  subirà la stessa dilatazione:

$$\mathbf{l}' = \mathbf{l}f$$

In corrispondenza, la funzione  $u_1 d\mathbf{l}$  diminuirà di un fattore  $\frac{1}{f^4}$ . La densità di energia infatti

diminuisce da una parte di un fattore  $\frac{1}{f^3}$  perché il volume aumenta di  $f^3$ , dall'altra di un fattore

$\frac{1}{f}$  perché l'energia associata al singolo fotone è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda cosicché

$$\mathbf{e}_{\mathbf{l}'} = \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{l}}}{f}$$

Si ha dunque:

$$u_1' d\mathbf{l}' = \frac{1}{f^4} u_1 d\mathbf{l} = \frac{8\mathbf{p}hc}{\mathbf{l}'^5 f^4} \frac{1}{e^{hc/K_B T} - 1} d\mathbf{l}$$

Moltiplicando e dividendo per  $f$  e ricordando che  $\mathbf{l}' = \mathbf{l}f$ , si ha:

$$u_1' d\mathbf{l}' = \frac{8\mathbf{p}hc}{\mathbf{l}'^5} \cdot \frac{1}{e^{hc f/T K_B} - 1}$$

cioè si ottiene una distribuzione di corpo nero con temperatura

$$T' = \frac{T}{f}$$

Pur diluita e indebolita (raffreddata) dall'espansione, ci aspettiamo di poter trovare traccia di questa radiazione che dovrebbe oggi impregnare tutto l'universo, ed è proprio quello che si è scoperto nel 1965, quando due ricercatori della Bell Telephone osservarono per caso l'esistenza di una

radiazione di fondo rilevabile con i radiotelescopi in ogni direzione dello spazio, e corrispondente ad una temperatura di circa  $3^\circ K$ .

## 2.5 Effetto fotoelettrico

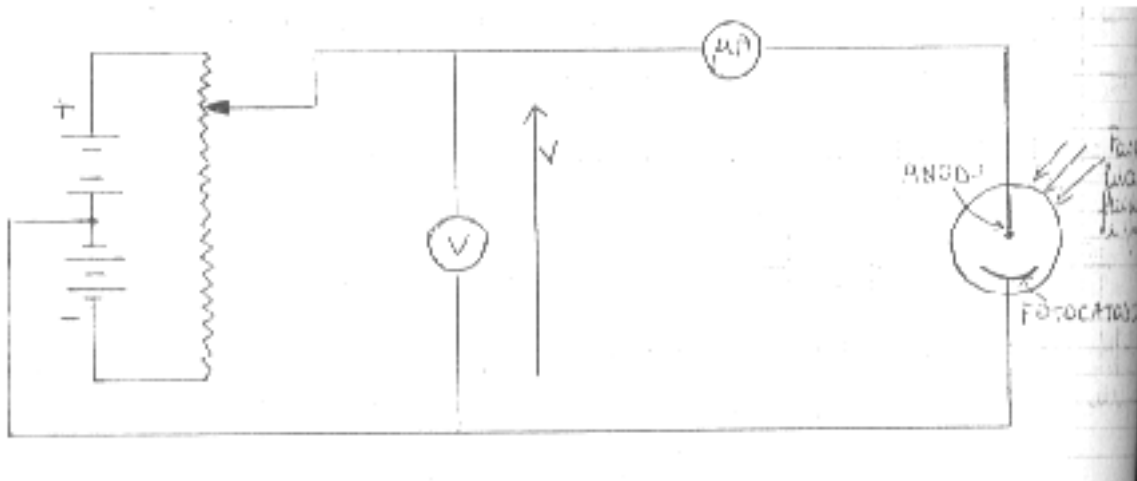
Vedi per es.

Haken-Wolf pag. 58

Brehm-Mullin pag. 99

Cagnac-Pebay-Peyroula pag. 5

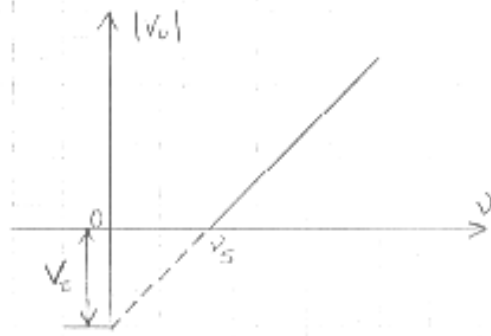
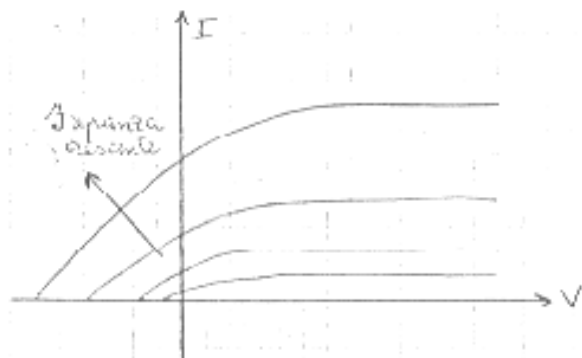
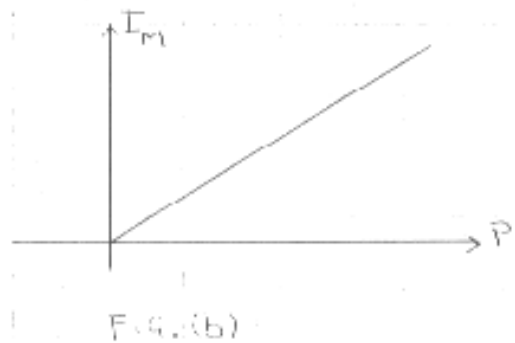
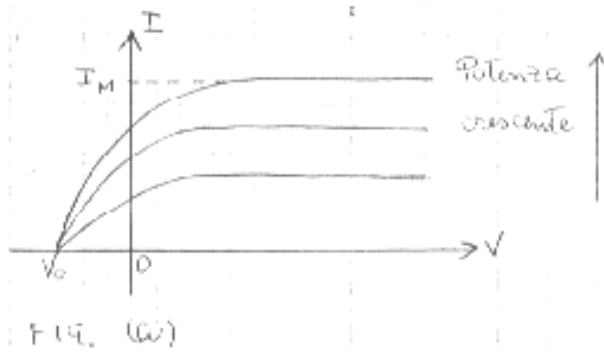
Nella seguente figura illustriamo l'apparato sperimentale usato per studiare l'effetto fotoelettrico:



Un bulbo di vetro contiene due elettrodi: un fotocatodo, cioè una lamina di un certo metallo (Cs, Rb, K, Na o altri ancora) che libera fotoelettroni se investito da luce monocromatica di opportuna frequenza, ed un anodo che attrae i fotoelettroni per mezzo di una differenza di potenziale  $V$  fornita da un partitore di tensione. I collegamenti sono fatti in modo che il potenziale possa essere sia positivo che negativo. Se  $V$  è abbastanza grande, la corrente fotoelettrica raggiunge un certo valore limite in corrispondenza del quale tutti i fotoelettroni emessi dal catodo sono raccolti dall'anodo. Se si cambia il segno di  $V$ , la corrente fotoelettrica non scende a zero immediatamente il che prova che gli elettroni sono emessi con velocità finita. Alcuni raggiungeranno l'anodo malgrado il campo elettrico si opponga al loro moto. Tuttavia se tale differenza di potenziale, cambiata di segno, è resa sufficientemente grande, si raggiunge un valore  $V_0$  (potenziale di arresto) in corrispondenza al quale la corrente fotoelettrica si riduce a zero. Questa differenza di potenziale  $V_0$ , moltiplicata per la carica dell'elettrone, misura l'energia cinetica  $K_{\max}$  del più veloce fotoelettrone emesso. In altre parole:

$$K_{\max} = eV_0$$

Le principali caratteristiche dell'effetto fotoelettrico sono mostrate nelle seguenti curve sperimentali



- 1) La figura a) mostra che il valore del potenziale d'arresto dipende solo dalla frequenza della luce usata; se la potenza  $P$  del raggio luminoso viene fatta variare con  $\nu$  fissata,  $V_0$  non cambia.
- 2) La figura b) mostra la dipendenza della corrente massima di saturazione della potenza del fascio è lineare. (Si può aumentare l'intensità della radiazione avvicinando la lampada o eliminando dei filtri)
- 3) La figura c) mostra che il valore del potenziale d'arresto aumenta con frequenza  $\nu$  della luce e, più precisamente, è una funzione lineare della frequenza. Questo è mostrato nella figura d) dove si vede la retta che rappresenta  $|V_0|$  come funzione di  $\nu$ , con  $|V_0|$  che va a zero alla frequenza di soglia  $\nu_s$  al di sotto della quale non c'è effetto fotoelettrico.
- 4) La pendenza della retta di figura d) è una costante indipendente da tutte le condizioni sperimentali e, in particolare, dal materiale del fotocatodo, mentre  $\nu_s$  dipende da questo materiale.

Tre delle più importanti caratteristiche dell'effetto fotoelettrico non si possono spiegare facendo ricorso alla teoria ondulatoria della luce:

- La teoria ondulatoria stabilisce che il vettore campo elettrico oscillante  $\vec{E}$  dell'onda luminosa aumenta in ampiezza con l'aumentare della potenza del fascio luminoso. Poiché la forza applicata all'elettrone è  $e\vec{E}$ , ciò suggerisce che l'energia cinetica dei fotoelettroni debba aumentare con l'aumentare della potenza del fascio luminoso. Come detto, questo non accade, infatti  $K_{\max} = eV_0$  è indipendente dalla potenza del fascio luminoso.
- Secondo la teoria ondulatoria l'effetto fotoelettrico dovrebbe verificarsi per qualsiasi frequenza della luce, purché essa abbia una potenza abbastanza elevata. Tuttavia abbiamo visto che per ciascuna superficie esiste una frequenza di soglia  $\nu_s$ . Per frequenze inferiori a questa, l'effetto fotoelettrico scompare qualunque sia la potenza del fascio luminoso.

- Se l'energia dei fotoelettroni è quella ceduta dall'onda incidente alla lamina di metallo, è improbabile che l'area dalla quale l'elettrone nel metallo può assorbire energia sia molto superiore a quella corrispondente ad alcuni diametri atomici. Così, se la potenza del fascio luminoso è abbastanza piccola ci dovrebbe essere un ritardo di tempo misurabile fra l'arrivo della luce sulla superficie e l'emissione del fotoelettrone. Durante questo intervallo di tempo l'elettrone dovrebbe assorbire energia dal fascio finché non ne ha accumulata abbastanza per uscire dal metallo. Invece non è mai stato misurato alcun ritardo.

Einstein riuscì a spiegare l'effetto fotoelettrico avanzando un'ipotesi notevole e cioè che l'energia, in un fascio luminoso, viaggia nello spazio divisa in pacchetti chiamati fotoni. L'energia  $E$  di un singolo fotone è data da

$$E = h\nu$$

E' da ricordare che Planck riteneva che la luce, benché emessa dalla sorgente in modo discontinuo si propagasse nello spazio in forma di onda elettromagnetica. L'ipotesi di Einstein stabilisce che la luce, viaggiando nello spazio, non si comporta affatto come un'onda, ma come una particella. Einstein assume che nel processo fotoelettrico un fotone è completamente assorbito da un elettrone nel fotocatodo. Quando l'elettrone è emesso dalla superficie del metallo, la sua energia cinetica sarà

$$K = h\nu - W$$

dove  $h\nu$  è l'energia del fotone incidente assorbito e  $W$  è il lavoro richiesto per rimuovere l'elettrone dal metallo. Questo lavoro è necessario per superare i campi attrattivi degli atomi e le perdite di energia cinetica dovute a collisioni interne dell'elettrone. Alcuni elettroni sono legati in modo più forte di altri; alcuni perdono energia nelle collisioni durante l'uscita. Nel caso di elettroni poco legati e nel caso in cui non ci siano perdite interne, ogni fotoelettrone emergerà con la massima energia cinetica, cioè

$$K_{\max} = h\nu - W_0 \quad (2.5.1)$$

dove  $W_0$ , una caratteristica energia del metallo chiamata funzione lavoro, è la minima energia necessaria per un elettrone per passare attraverso la superficie del metallo e sfuggire alle forze attrattive che normalmente legano l'elettrone al metallo.

Consideriamo come l'ipotesi del fotone di Einstein risponda alle tre obiezioni sollevate contro l'interpretazione ondulatoria dell'effetto fotoelettrico.

Quanto alla prima obiezione (l'indipendenza di  $K_{\max}$  dalla potenza del fascio luminoso), c'è un completo accordo tra la teoria del fotone e l'esperimento.

Raddoppiando la potenza del fascio luminoso si raddoppia semplicemente il numero di fotoni mentre non cambia l'energia  $h\nu$  dei singoli fotoni.

La seconda obiezione (esistenza di una frequenza di soglia) viene rimossa dall'equazione 2.5.1

Se  $K_{\max} = 0$  dalla 2.5.1 si ha

$$h\nu_s - W_0 = 0 \Rightarrow h\nu_s = W_0$$

il che indica che il fotone ha energia sufficiente ad estrarre i fotoelettroni e nessuna in sovrappiù da comunicare come energia cinetica. Se  $\nu$  è inferiore a  $\nu_s$ , i singoli fotoni, indipendentemente dal loro numero (cioè qualunque sia la potenza del fascio luminoso), non avranno energia sufficiente a estrarre fotoelettroni.

La terza obiezione (emissione non ritardata) è eliminata dalla teoria del fotone, perché l'energia richiesta è fornita in quantità discreta e non distribuita uniformemente su una vasta area, come nella

teoria ondulatoria. Riscriviamo l'equazione dell'effetto fotoelettrico di Einstein sostituendo  $eV_0$  a  $K_{\max}$ . Si avrà

$$eV_0 = h\nu - W_0 \Rightarrow V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_0}{e} = \frac{h}{e}(\nu - \nu_s)$$

Così la teoria di Einstein prevede una dipendenza lineare tra  $V_0$  e  $\nu$ , in perfetto accordo con l'esperienza. La pendenza della curva sperimentale riportata nella figura d) è  $\frac{h}{e}$ , indipendente dal materiale del fotocatodo. Dalla misura di questa pendenza si deduce un valore sperimentale della costante di Planck. Praticamente si ottiene lo stesso valore che nelle misure della radiazione termica. L'accordo numerico nelle due determinazioni di  $h$ , usando fenomeni così diversi, fornisce una prova della correttezza dell'ipotesi fondamentale della teoria quantistica, l'ipotesi, cioè, di una quantizzazione dell'energia.

I dati sull'effetto fotoelettrico furono raccolti da Millikan al quale nel 1923 fu assegnato il premio Nobel per il suo accurato lavoro. Queste misure sono difficoltose da ottenere, molto più di quanto le curve sperimentali che abbiamo disegnato facciano pensare. Innanzitutto occorre praticare entro il bulbo di vetro un alto vuoto per evitare indesiderate interazioni con le molecole d'aria. L'effetto fotoelettrico poi, interessa particolarmente la superficie del metallo; per questo è necessario evitare pellicole di ossido, di grasso o altre contaminazioni superficiali. Millikan escogitò una tecnica per tagliare sotto vuoto delle lamine sottili dalla superficie metallica, costruendosi una "officina nel vuoto", come egli la chiamava. La determinazione del potenziale  $V_0$  infine è complicata in pratica da un effetto fotoelettrico parassita all'anodo che può far cambiare il segno alla corrente  $I$ . Nelle sue misure di alta precisione, Millikan fece l'anodo con un metallo differente dal catodo, scelto in modo che la sua frequenza di soglia fosse molto più alta di quella del fotocatodo. Lavorando con frequenze intermedie tra le due frequenze di soglia questo effetto fotoelettrico parassita è eliminato. Ma lavorare con due metalli diversi presenta un nuovo problema. Si sa che esiste una differenza di potenziale di contatto tra due diversi metalli. La loro somma algebrica è zero in una catena metallica chiusa e isoterma, ma non è così nel caso descritto in cui la catena metallica è interrotta dentro il bulbo tra i due elettrodi. Segue che il potenziale  $U$  misurato con il voltmetro non è uguale al reale potenziale  $V$  applicato agli elettroni nel vuoto; la loro differenza è uguale alla differenza di potenziale di contatto  $K$  tra i metalli di cui sono costituiti i due elettrodi. Quando si disegna la retta  $|V_0| = f(\nu)$ , essa è spostata verticalmente di una quantità incognita  $K$ . Questo non cambia la pendenza  $\frac{h}{e}$  della retta, ma impedisce la verifica della relazione  $h\nu_s = W_0 = eV_0$  e impedisce una

accurata misura del potenziale di estrazione  $V_E$  (vedi figura d). Per superare questa difficoltà Millikan usò tre metalli A,B,C con frequenze di soglia crescenti:

$$\nu_s(A) < \nu_s(B) < \nu_s(C).$$

Per studiare l'effetto fotoelettrico del metallo A, si può usare un anodo fatto di metallo B o di metallo C. Il voltmetro misura le seguenti tensioni quando la corrente fotoelettrica è zero:

$$\text{con l'anodo B } U_{OB}(A) = V_0(A) + K_{AB}$$

$$\text{con l'anodo C } U_{OC}(A) = V_0(A) + K_{AC}$$

$V_0(A)$  è il reale potenziale esistente nel vuoto. Sottraendo le due equazioni termine a termine si ottiene:

$$U_{OC}(A) - U_{OB}(A) = K_{AC} - K_{AB} = K_{BC}$$

dove  $K_{BC}$  è il potenziale di contatto tra i due metalli B e C. L'effetto fotoelettrico per un metallo B può ora essere studiato con un anodo fatto del metallo C. Quando la corrente fotoelettrica è zero il voltmetro misura il potenziale

$$U_{oc}(B) = V_0(B) + K_{BC}$$

da cui si calcola  $V_0(B)$  avendo precedentemente calcolato  $K_{BC}$ . C'è da fare un'ultima osservazione riguardo l'effetto fotoelettrico. Nel processo fotoelettrico i fotoni sono assorbiti. Questo richiede che gli elettroni siano legati agli atomi o ai solidi perché un elettrone veramente libero non può assorbire un fotone e conservare nel processo sia l'energia totale relativistica che la quantità di moto. Dobbiamo avere un elettrone legato, dunque, poiché le forze di legame servono a trasmettere la quantità di moto all'atomo o al solido. Per la grande massa di un atomo o un solido, in confronto a quella di un elettrone, il sistema può assorbire un gran valore di quantità di moto senza acquisire una significativa quantità di energia.

L'effetto è dunque possibile solo perché c'è una particella pesante che rincula in aggiunta ad un elettrone emesso. A frequenze elevate (raggi  $\gamma$ , X, ...) l'energia di legame dell'elettrone non è significativa: l'elettrone non può essere considerato legato ed altri processi, presto discussi, diventano più importanti.

## 2.6 Effetto Compton

Vedi per es.

Franchetti-Ranfagni-Mugnai pag. 77

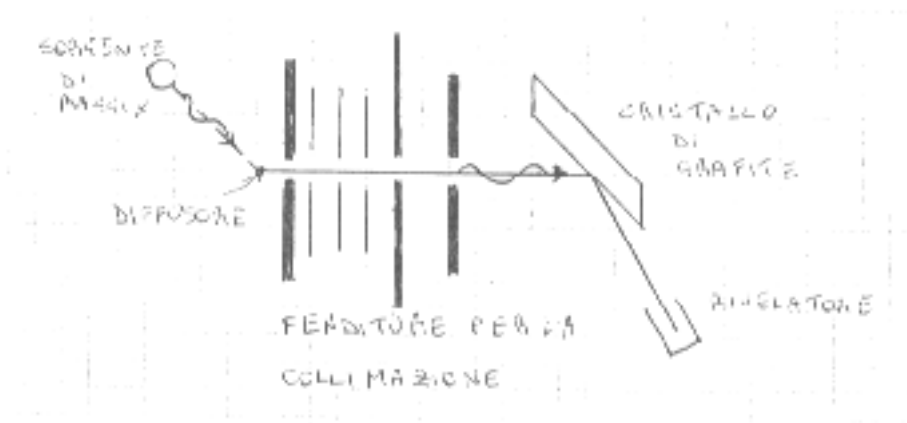
Brehm-Mullin pag 107

Haken-Wolf pag. 60

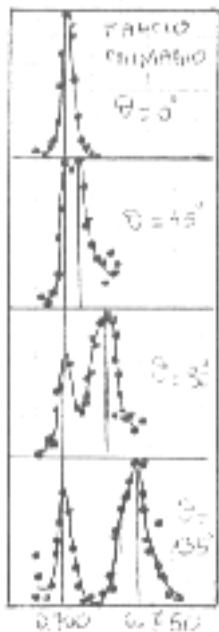
Cagnac-Pebay-Peyroula pag. 48

Una definitiva conferma del concetto di fotone come quanto di energia fu fornita nel 1923 da Compton.

Compton inviò un fascio di luce monocromatica di raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  su un blocco di grafite e misurò per vari angoli di diffusione l'intensità dei raggi X in funzione della lunghezza d'onda.



La figura seguente mostra i risultati dell'esperimento



vediamo che per quanto il fascio incidente abbia una sola lunghezza d'onda  $\lambda$  i raggi X diffusi hanno picchi di intensità a due lunghezze d'onda; uno di essi corrisponde alla lunghezza d'onda incidente  $\lambda$  che è superiore alla precedente della quantità di  $\Delta\lambda$ . Questo  $\Delta\lambda$ , chiamato spostamento Compton, varia col variare dell'angolo a cui sono osservati i raggi X diffusi. La presenza di un'onda diffusa di lunghezza d'onda  $\lambda$  non può essere spiegata se i raggi X incidenti sono considerati come un'onda elettromagnetica (come in meccanica classica). Infatti in questa descrizione l'onda incidente, di frequenza  $\nu$ , fa sì che gli elettroni del blocco su cui avviene la diffusione, oscillino alla stessa frequenza. Questi elettroni oscillanti, paragonabili alle cariche che si muovono avanti e indietro in una minuscola antenna radio, irradiano onde elettromagnetiche della medesima frequenza  $\nu$  e lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'onda incidente.

Compton fu in grado di spiegare i risultati sperimentali da lui ottenuti postulando che il fascio di raggi X incidente non fosse un'onda, ma un insieme di fotoni e che questi urtassero gli elettroni liberi nel blocco su cui avviene la diffusione proprio come se si trattasse di palle da biliardo. I fotoni di rinculo uscenti dal blocco costituiscono sotto questo punto di vista la radiazione diffusa. Dato che il fotone incidente trasferisce un po' della sua energia all'elettrone con cui entra in collisione, il fotone diffuso deve avere un'energia inferiore; pertanto dovrà avere una frequenza inferiore che implica una lunghezza d'onda più elevata. Questa descrizione rende conto almeno qualitativamente dello spostamento di lunghezza d'onda  $\Delta\lambda$ . Analizziamo ora quantitativamente una singola collisione fotone-elettrone.

La figura seguente rappresenta una collisione tra un fotone e un elettrone; si fa l'ipotesi che l'elettrone sia a riposo ed essenzialmente libero, cioè non legato agli atomi del diffusore.

Il processo è descritto sinteticamente nella seguente tabella:

		PRIMA DELLA COLLISIONE	DOPO LA COLLISIONE
FOTONE	ENERGIA	$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$	$h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
	IMPULSO	$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h}{\lambda_0}$ (in $\hat{n}_0$ )	$\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ (con l'angolo $\theta$ )
ELETTRONE	ENERGIA	$m_0 c^2$	$mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$
	IMPULSO	0	$p_e(\varphi)$

Applichiamo alla collisione il principio di conservazione dell'energia e dell'impulso. Siccome gli elettroni di rinculo possono avere una velocità  $v$  paragonabile a quella della luce dobbiamo usare l'espressione relativistica dell'energia cinetica dell'elettrone. Possiamo scrivere:

conservazione dell'energia:

$$h\nu_0 + m_0 c^2 = h\nu + \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (2.6.1)$$

conservazione dell'impulso:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_0}{c} &= \frac{h\nu}{c} \cos \mathbf{J} + p \cos \mathbf{j} \\ 0 &= \frac{h\nu}{c} \sin \mathbf{J} + p \sin \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

dalle 2.6.1 e 2.6.2 si ricava :

$$\begin{cases} p \cos \mathbf{j} = \frac{h}{c} (\nu_0 - \nu \cos \mathbf{J}) \\ p \sin \mathbf{j} = -\frac{h\nu}{c} \sin \mathbf{J} \end{cases} \Rightarrow p^2 c^2 = h^2 (\nu_0^2 + \nu^2 - 2\nu_0 \nu \cos \mathbf{J}) \quad (2.6.3)$$

Si ricava quindi

$$\nu_0 - \nu = \frac{h}{m_0 c^2} (1 - \cos \mathbf{J})$$

e dalla relazione tra frequenza e lunghezza d'onda si ha infine

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \mathbf{J}) \quad (2.6.4)$$

La 2.6.4 mostra che lo spostamento Compton  $\Delta \lambda$  dipende solo dall'angolo di diffusione  $\mathbf{J}$  e non dalla lunghezza d'onda iniziale  $\lambda$ . Si noti che  $\Delta \lambda$  varia da zero (per  $\mathbf{J} = 0$ , che corrisponde ad una

collisione di "striscio" per cui il fotone non è deflesso) a  $\frac{2h}{m_0c}$  (per  $\mathbf{J} = 180^\circ$ , che corrisponde ad una

collisione "frontale" ove il fotone incidente rimbalza all'indietro)

Rimane da spiegare la presenza del picco per il quale la lunghezza d'onda non varia nella diffusione.

Si può spiegare questo picco come risultante da una collisione tra fotoni ed elettroni legati a ioni del blocco su cui avviene la diffusione. Nelle collisioni gli elettroni legati si comportano come gli elettroni liberi con la differenza che la loro massa efficace è molto maggiore. Ciò è dovuto al fatto che nella collisione rincula tutto il complesso ionico. La massa efficace  $M$  per un diffusore di carbonio è circa uguale alla massa di un nucleo di carbonio. Dato che questo nucleo contiene 6 protoni e 6 neutroni, avremo approssimativamente  $M = 12 \times 1840 = 22000 m_0$ . Se sostituiamo  $M$  a  $m_0$  nella 2.1.6, vediamo che lo spostamento Compton per collisioni con elettroni strettamente legati è

estremamente piccolo, tanto da non potersi misurare. Il fattore  $\frac{h}{m_0c} = \Lambda$  che compare nella 2.6.4 è

detto lunghezza d'onda di Compton, vale 2.426 pm e rappresenta la lunghezza d'onda alla quale

l'energia dei fotoni è uguale all'energia di riposo dell'elettrone:  $h\nu = \frac{hc}{\Lambda} = 0.511 \text{ MeV}$ . Il valore  $d\lambda$

è dell'ordine di grandezza di  $\Lambda$ . L'entità degli scambi di energia tra il fotone e l'elettrone può essere valutata come segue

- 1) se  $h\nu_0 \ll m_0c^2$  o  $\mathbf{I}_0 \gg \Lambda$  cosicché  $d\lambda \ll \Lambda$  allora il fotone cede poca energia;
- 2) se  $h\nu_0 > m_0c^2$  o  $\mathbf{I}_0 < \Lambda$  cosicché  $d\lambda > \Lambda$  allora il fotone cede la maggior parte della sua energia.

Osserviamo ancora che poiché  $d\lambda$  è dell'ordine di  $\Lambda \approx 10^{-12} \text{ m}$ , solo per  $\mathbf{I}$  piccole (raggi X o  $\mathbf{g}$ ) è possibile osservare l'effetto Compton. Abbiamo detto che raggi X monocromatici di lunghezza d'onda  $\mathbf{I}$  incidano su un diffusore di grafite. Viene misurata la distribuzione delle intensità in funzione della lunghezza d'onda dei raggi X diffusi a diversi angoli  $\mathbf{J}$ . Le lunghezze d'onda diffuse si misurano osservando le riflessioni di Bragg prodotte da un cristallo. Le intensità si misurano con un rivelatore come una camera di ionizzazione.

## Riflessione (Diffrazione) di Bragg

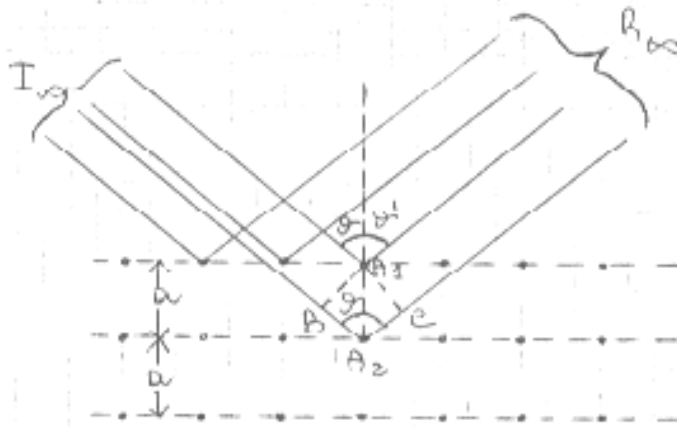
Vedi per es.

Brehm-Mullin pag. 105

Cagnac-Pebay-Peyroula pag.135

Haken-Wolf pag.16

Precisiamo qualcosa a proposito delle riflessioni di Bragg. Sappiamo che un cristallo è un insieme di atomi o gruppi atomici o ioni distribuiti con legge periodica secondo tre direzioni fondamentali a costituire un reticolo spaziale. Il passo del reticolo su ciascuna di tali direzioni è dell'ordine di grandezza di  $10^{-10} \text{ m}$ , quindi è confrontabile con la lunghezza d'onda dei raggi X. La teoria sviluppata da M. von Laue, fa prevedere che onde coerenti diffuse da atomi disposti in codesto modo, devono dar luogo a fenomeni di interferenza in qualche modo analoghi a quelli delle onde difratte da un reticolo ottico. Il concetto base si può illustrare con riferimento alla figura seguente, che rappresenta una sezione di un reticolo cubico (per es. un cristallo di NaCl).



Un fascio di raggi paralleli incide ad un angolo  $\theta$  con la normale ai piani reticolari orizzontali. Le onde secondarie emesse per diffusione dagli atomi di un medesimo piano reticolare nella direzione che forma l'angolo  $\theta = \theta'$  con la medesima normale interferiscono positivamente dando luogo ad una specie di onda riflessa di ampiezza non nulla in tale direzione. Ma affinché le onde riflesse dai successivi piani reticolari interferiscano a loro volta positivamente tra loro bisogna che le differenze di cammino fra esse siano multiple di  $\lambda$ . In figura si vede che la differenza di cammino tra  $I_{\infty}A_1R_{\infty}$  e  $I_{\infty}A_2R_{\infty}$  è  $BA_2 + A_2C = 2a \cos \theta$ .

Si avrà dunque interferenza positiva tra le onde riflesse a tutti i piani reticolari in questione soltanto se è soddisfatta la relazione

$$2a \cos \theta = k\lambda$$

enunciata da W. Bragg.

Spesso in luogo dell'angolo di incidenza cioè dell'angolo con la normale ai piani reticolari si considera l'angolo con i piani stessi nella condizione di Bragg compare ovviamente il seno di tale angolo.