

# Introduzione alla Meccanica Quantistica

Prof. G.Giansiracusa

A.A. 2004/2005

# Indice

<b>1</b>	<b>Cenni storici</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>L'esperimento di Young rivisitato</b>	<b>2</b>
2.1	Esperimento con una mitragliatrice . . . . .	2
2.1.1	Esperienza di Young . . . . .	5
2.1.2	Esperimento con neutroni . . . . .	8
2.1.3	Esperimento con protoni . . . . .	8
2.1.4	Commento sulla complementarità . . . . .	11
2.1.5	Due tipi di alternative . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Critica della Meccanica Classica</b>	<b>14</b>
3.1	Introduzione . . . . .	14
3.2	Una nuova Meccanica . . . . .	15
3.3	Le incompatibilità tra la nuova teoria e la Meccanica Classica . . . . .	16
3.4	Il ruolo della Probabilità nella Nuova Fisica . . . . .	17
3.4.1	Ruolo della probabilità negli esperimenti <i>à la Young</i> . . . . .	18
3.4.2	Il senso fisico delle alternative e le nuove regole . . . . .	20
3.5	La misura in Meccanica Quantistica . . . . .	21
3.5.1	Una misura di impulso . . . . .	22
3.5.2	Le misure ideali . . . . .	23
3.5.3	Ampiezza di un processo di misura . . . . .	24
3.5.4	????? . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Esperienza di Stern-Gerlach</b>	<b>26</b>
4.1	Descrizione dell'apparato . . . . .	26
4.2	Interpretazione dell'esperimento . . . . .	26
4.3	Filtri Stern-Gerlach in serie . . . . .	26
4.4	titolo da decidere . . . . .	26
4.5	Dots . . . . .	27
4.6	Boxed formulas . . . . .	27
4.7	qualche cosa . . . . .	27

<b>5</b>	<b>Lo spazio di Hilbert degli stati</b>	<b>28</b>
5.1	Introduzione . . . . .	28
5.2	Variabili dinamiche ed operatori . . . . .	31
5.2.1	Valor medio delle misure di una variabile dinamica . . . . .	32
5.2.2	Una precisazione non priva di interesse . . . . .	34
5.3	Compatibilità tra variabili dinamiche in Meccanica Quantistica . . . . .	36
5.3.1	Misure di posizione e di impulso . . . . .	37
5.4	Variabili compatibili . . . . .	39
5.5	Variabili Dinamiche incompatibili . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Le traslazioni di spazio</b>	<b>42</b>
5.1	Operatori di posizione e spettro continuo . . . . .	42
5.1.1	Particella in una dimensione . . . . .	42
5.1.2	Proprietà della delta di Dirac . . . . .	45
5.1.3	Particella libera nello spazio . . . . .	45
5.2	Le proprietà delle traslazioni di spazio . . . . .	48
5.3	Le traslazioni nello spazio degli stati . . . . .	50
5.3.1	Le traslazioni infinitesime nello spazio degli stati . . . . .	53
5.3.2	Le traslazioni finite . . . . .	57
5.4	Punto di vista passivo delle Traslazioni . . . . .	58
5.4.1	Come cambia l'operatore di posizione in una traslazione . . . . .	59
5.4.2	Le relazioni di commutazione posizione-impulso . . . . .	59
5.5	Gli autostati di impulso . . . . .	60
5.5.1	Completezza degli autostati di impulso . . . . .	63
5.5.2	Cambiamento di rappresentazione . . . . .	64
5.5.3	L'impulso nella rappresentazione delle coordinate . . . . .	64
5.5.4	Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	66
5.5.5	Osservabili invarianti per traslazioni . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Le Equazioni del Moto</b>	<b>68</b>
6.1	Introduzione . . . . .	68
6.2	Operatore Evoluzione . . . . .	68
6.2.1	Evoluzione Infinitesima . . . . .	69
6.3	Uniformità del tempo . . . . .	70
6.4	Equazione del moto per $U$ . . . . .	73
6.5	La rappresentazione di Schrödinger . . . . .	74
6.5.1	Evoluzione dei valori medi . . . . .	74
6.5.2	Valori medi degli stati stazionari . . . . .	75
6.5.3	Le costanti del moto in Meccanica Quantistica . . . . .	76
6.6	La rappresentazione di Heisenberg . . . . .	77
6.6.1	Osservazione . . . . .	79
6.7	Teorema di Ehrenfest . . . . .	80
6.7.1	Algebra dei commutatori . . . . .	81

6.7.2	Teorema di Ehrenfest . . . . .	81
6.7.3	Approssimazione classica e teorema di Ehrenfest . . . . .	81
6.7.4	Costanti del moto nello schema di Heisenberg . . . . .	81

# Capitolo 5

## Lo spazio di Hilbert degli stati

### 5.1 Introduzione

Abbiamo già detto che ogni stato fisico può essere analizzato per mezzo di un processo di filtraggio in un certo insieme di stati di base e che il comportamento del sistema successivo alla misura è indipendente dalla storia precedente. Questi stati di base corrispondono alle alternative interferenti compatibili con il dispositivo sperimentale e possono essere scelti in infiniti modi equivalenti.

Ciò significa che gli stati di base devono essere prodotti da filtri perfetti ( e perciò osservabili in linea di principio) e devono esaurire tutte le alternative possibili relative a quelle proprietà che l'apparato sperimentale sta esplorando.

Abbiamo già detto che per conoscere lo stato di una particella bisognerebbe conoscere le probabilità con cui si verificano tutti i processi che possono aver luogo sottoponendo il sistema-particella a tutte le possibili operazioni di misura. In realtà tutto ciò è eccessivo:

*per avere la massima informazione basta individuare un sottoinsieme di alternative ( e cioè di rivelatori) capaci di dare informazioni adeguate tramite le quali poter poi costruire ogni altro risultato ottenibile con un'altra serie di misure.*

Notiamo che una alternativa è sempre qualche informazione concernente una qualche variabile dinamica che può essere sottoposta ad osservazione fisica mediante opportuni rivelatori: le vie alternative possono sempre essere individuate dagli stati in cui esce fuori il sistema dopo una serie completa di misure ideali intermedie ( ma virtuali ).

Supponiamo di avere individuato un tale sottoinsieme di rivelatori e di conoscere l'insieme di tutti gli stati  $\{\chi_i\}$  cui essi sono sensibili. In tali condizioni per determinare perfettamente lo stato  $|\psi\rangle$  del sistema basta conoscere le ampiezze

$$\langle \chi_i | \psi \rangle$$

In questo senso gli stati  $\{\chi_i\}$  individuano tutte le alternative interferenti tramite cui si può realizzare il processo sotto osservazione. Occorre notare le seguenti proprietà:

- Poiché gli stati  $\{\chi_i\}$  rappresentano vie alternative tra loro indipendenti dobbiamo porre

$$\langle \chi_i | \chi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.1)$$

- Poiché formano un sistema di alternative completo si deve avere:

$$\sum_i |\langle \chi_i | \psi \rangle|^2 = 1 \quad (5.2)$$

ovvero

$$\sum_i \langle \chi_i | \psi \rangle^* \cdot \langle \chi_i | \psi \rangle = 1 \quad (5.3)$$

A questo punto è chiaro che possiamo analizzare l'ampiezza di un qualsiasi processo di misura  $\langle \varphi | \psi \rangle$  in termini delle vie alternative intermedie  $\{\chi_i\}$  che possono verificarsi e scrivere:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_i \langle \varphi | \chi_i \rangle \langle \chi_i | \psi \rangle \quad (5.4)$$

Notiamo adesso che l'ampiezza di un processo è un funzione a valori complessi con una struttura piuttosto particolare.

Se infatti nell'eq. 5.4 poniamo  $\varphi = \psi$  si ottiene:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | \chi_i \rangle \langle \chi_i | \psi \rangle \quad (5.5)$$

Tuttavia è chiaro che deve essere unitaria la probabilità di rivelare un sistema nello stato  $\psi$  quando esso sia stato preparato proprio in quello stesso stato:

$$P(\psi \longrightarrow \psi) = 1 \quad (5.6)$$

La maniera più semplice di garantire questa relazione è quella di porre per ogni stato  $\psi$  del sistema:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (5.7)$$

Pertanto l'eq. 5.5 impone:

$$\sum_i \langle \psi | \chi_i \rangle \langle \chi_i | \psi \rangle = 1 \quad (5.8)$$

Il confronto tra l'eq. 5.8 e l'eq. 5.3 indica che è lecito porre:

$$\langle \chi_i | \psi \rangle^* = \langle \psi | \chi_i \rangle \quad (5.9)$$

Gli stati  $\{\chi_i\}$  nelle ampiezze  $\langle \chi_i | \psi \rangle$  compaiono come stati di rivelazione mentre nelle ampiezze  $\langle \psi | \chi_i \rangle$  come stati di sorgente. Il fatto che queste due ampiezze siano tra loro coniugate ( ed hanno quindi lo stesso modulo ) é conforme all'idea già consolidata secondo la quale una informazione proveniente da preparazione é sempre equivalente ad un'altra informazione ottenuta tramite rivelazione. Inoltre dato che gli stati  $\{\chi_i\}$  individuano tutte le alternative intermedie concesse al processo di misura, siamo indotti ad imporre che la proprietà 5.9 valga per le ampiezze relative a tutti i processi fisici. Scriveremo quindi:

$$\langle \varphi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \varphi \rangle \quad (5.10)$$

Questa relazione esprime in modo implicito l'equivalenza sostanziale tra le informazioni di sorgente e le informazioni di rivelazione: per ogni apparato di preparazione  $S$  che produce il sistema in uno stato  $\psi$  è possibile progettare in dispositivo di rivelazione  $R$  che fornisce una risposta positiva solo quando il sistema all'ingresso si trova nello stato  $\psi$ .

Anzi noi assumiamo che sia sempre possibile costruire l'apparato di rivelazione  $R$  in modo tale che il sistema  $S$  dopo la misura venga lasciato proprio nello stato  $\psi$ : ciò significa chiaramente che  $R$  esegue misure ideali. Osserviamo adesso che l'eq. 5.4 é valida quale che sia lo stato di rivelazione  $\{\varphi\}$  e quindi possiamo fare astrazione a qualsiasi riferimento allo stato di rivelazione. Per questo motivo la riscriviamo nella seguente maniera simbolica:

$$|\psi\rangle = \sum_i |\chi_i\rangle \langle \chi_i | \psi \rangle \quad (5.11)$$

In questa espressione é implicito il fatto che per avere informazioni sullo stato  $\psi$  abbiamo eseguito osservazioni con rivelatori  $R_\chi$  che ci hanno portato a conoscere le ampiezze  $\langle \chi_i | \psi \rangle$ . In un certo senso lo stato  $\psi$  risuona tra gli stati  $\chi_i$  con dei pesi dati dalle ampiezze  $\langle \chi_i | \psi \rangle$ . Per questo motivo noi indicheremo uno stato di preparazione con il simbolo  $|\psi\rangle$  introdotto nella 5.11. Si suole esprimere questo stato di cose dicendo che lo stato  $|\psi\rangle$  é dato dalla sovrapposizione degli stati  $|\chi_i\rangle$ . Inoltre la 5.11 mostra che a questi simboli si può assegnare la struttura di vettori di uno spazio vettoriale complesso  $\mathcal{H}$  nel quale gli stati  $|\chi_i\rangle$  giocano il ruolo di vettori di base. Seguendo una notazione introdotta da Dirac chiameremo  $\mathcal{H}$  spazio dei ket e ket i vettori relativi.

Poichè la relazione 5.4 vale qualunque sia lo stato di sorgente  $|\psi\rangle$  possiamo anche scrivere:

$$\langle \varphi | = \sum_i \langle \varphi | \chi_i \rangle \langle \chi_i | \quad (5.12)$$

Questa scrittura riassume in modo simbolico il fatto già noto che l'informazione ottenuta con il rivelatore  $R_\varphi$  è equivalente a quella che si ottiene tramite tutti i rivelatori  $R_{\chi_i}$  purchè si conoscano le ampiezze  $\langle \varphi | \chi_i \rangle$ . Noi pertanto useremo

il simbolo  $\langle \psi |$  per indicare uno stato di rivelazione e possiamo notare che l'eq. 5.12 mostra che anche questi simboli hanno la struttura di uno spazio vettoriale complesso: lo *spazio dei bra*  $\mathcal{H}'$ ; riferiremo inoltre i vettori  $\langle \quad |$  di questo spazio con il nome di *bra*

Tutto ciò mette in rilievo che per ogni stato di preparazione  $|\psi\rangle$  esiste un apparato di rivelazione capace di dare risposta solo quando il sistema osservato si trova in quello stesso stato. Lo stato di rivelazione in cui viene lasciato il sistema da quella particolare misura sarà indicato con il simbolo  $\langle \psi |$ . Le precedenti argomentazioni indicano l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i vettori  $|\quad\rangle$  dello spazio dei ket ed i vettori  $\langle \quad |$  dell' spazio dei bra.

Per chiarire la natura di questa corrispondenza  $|\psi\rangle \longleftrightarrow \langle \psi |$  osserviamo che l'ampiezza  $\langle \varphi | \psi \rangle$  al variare di  $|\psi\rangle$  è una funzione lineare su  $\mathcal{H}$  che assegna al  $\langle \varphi |$  il significato di un funzionale lineare ed allo spazio  $\mathcal{H}'$  la proprietà di essere il duale di  $\mathcal{H}$ . In maniera equivalente l'ampiezza  $\langle \psi | \varphi \rangle$  può essere considerata come il prodotto scalare tra il  $|\psi\rangle$  ed il ket  $|\varphi\rangle$  duale del bra  $\langle \varphi |$ .

Possiamo riassumere quanto detto nelle seguenti proposizioni:

- Ad ogni sistema fisico è associato un opportuno spazio vettoriale  $\mathcal{H}$
- le ampiezze dei processi consentiti al sistema definiscono un prodotto scalare in  $\mathcal{H}$  che così viene ad assumere la struttura di uno *spazio di Hilbert*
- ad ogni stato di preparazione del sistema è associato un ben definito vettore ket  $|\psi\rangle$  di  $\mathcal{H}$  con norma unitaria:  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$

Osservando la relazione 5.11 ci accorgiamo che all'espressione simbolica:

$$\hat{I} = \sum_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i| \quad (5.13)$$

si può attribuire il significato dell'operatore identità nello spazio  $\mathcal{H}$ . Questa relazione simbolica viene chiamata *risoluzione dell'identità* ed esprime il fatto fisico che gli stati  $|\chi_i\rangle$  esauriscono tutte le alternative intermedie permesse al sistema.

## 5.2 Variabili dinamiche ed operatori

Consideriamo un sistema preparato in uno stato quantistico  $|\psi\rangle$  e supponiamo di voler eseguire su di esso misure di una variabile dinamica  $\mathcal{A}$ . Indichiamo inoltre con  $\{a_k\}$  l'insieme dei risultati possibili delle misure di  $\mathcal{A}$ . In ciò che segue, per semplificare le notazioni, ammetteremo che per ottenere la massima informazione fisica sul sistema sia sufficiente eseguire misure ideali della sola variabile dinamica  $\mathcal{A}$ .

Abbiamo già notato come una misura ideale di  $\mathcal{A}$  che ha prodotto il risultato  $a_k$  lascia il sistema in uno stato  $|a_k\rangle$  caratterizzato dalla seguente proprietà: una

qualsiasi nuova misura ideale di  $\mathcal{A}$  produce sempre lo stesso valore  $a_k$  ( in altri termini la distribuzione statistica delle misure di  $\mathcal{A}$  ha deviazione standard nulla)

Abbiamo già detto che l'ampiezza  $\langle a_k | \psi \rangle$  si può interpretare in due modi strettamente equivalenti:

- come l'ampiezza di probabilità di ottenere il valore  $a_k$  in seguito alla misura della variabile  $\mathcal{A}$  sul sistema preparato nello stato  $|\psi\rangle$
- come l'ampiezza di probabilità che avendo preparato il sistema nello stato  $|\psi\rangle$ , una misura di  $\mathcal{A}$  lo rivela in uno stato  $\langle a_k |$  con devianza nulla.

Dopo aver effettuato una serie numerosissima di  $N$  misure saremo in grado di determinare la distribuzione di probabilità  $\{p(a_k)\}$  dove:

$$p(a_k) = |\langle a_k | \psi \rangle|^2 \quad (5.14)$$

È ragionevole individuare gli elementi ripetibili di queste misure nei vari momenti statistici di questa distribuzione  $\{p(a_k)\}$ . Tra questi assumono un ruolo particolarmente importante il valor medio e lo scarto quadratico medio della serie di misure della variabile  $\mathcal{A}$ .

### 5.2.1 Valor medio delle misure di una variabile dinamica

Prendiamo prima in considerazione il valor medio  $\langle \mathcal{A} \rangle_\psi$  di una serie infinita di misure ideali della variabile dinamica  $\mathcal{A}$  sul sistema preparato nello stato  $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle_\psi &= \sum_i p(a_i) \cdot a_i = \sum_i |\langle a_i | \psi \rangle|^2 a_i = \sum_i \langle \psi | a_i \rangle a_i \langle a_i | \psi \rangle \\ &= \langle \psi \left( \left| \sum_i |a_i\rangle \cdot a_i \cdot \langle a_i| \right) | \psi \right\rangle \end{aligned}$$

L'espressione in parentesi si può interpretare come un operatore lineare  $\hat{A}$  agente sullo spazio  $\mathcal{H}$  :

$$\hat{A} = \sum_i |a_i\rangle \cdot a_i \cdot \langle a_i| \quad (5.15)$$

che al ket  $|\psi\rangle$  associa il ket  $|\psi'\rangle$  definito da :

$$|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle a_i \langle a_i | \psi \rangle \quad (5.16)$$

L'operatore  $\hat{A}$  è connesso strettamente alla variabile dinamica  $\mathcal{A}$  dalla seguente relazione:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \psi' \rangle \quad (5.17)$$

$$= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (5.18)$$

Vogliamo ora mettere in rilievo la relazione che intercorre tra l'operatore lineare  $\hat{A}$  ed i ket  $| a_i \rangle$  che corrispondono agli autostati della variabile dinamica  $\mathcal{A}$ . Per questo scopo applichiamo l'operatore  $\hat{A}$  al ket  $| a_j \rangle$  corrispondente all'autostato di  $\mathcal{A}$  con autovalore  $a_j$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} | a_j \rangle &= \sum_i | a_i \rangle a_i \langle a_i | a_j \rangle \\ &= \sum_i | a_i \rangle a_i \delta_{i,j} \\ &= a_j | a_j \rangle \end{aligned}$$

In questa relazione abbiamo fatto uso delle condizioni imposte ai ket  $| a_i \rangle$ :

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.19)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (5.20)$$

In altri termini i vettori  $| a_i \rangle$  sono gli autovettori di  $\hat{A}$  appartenenti ai valori  $a_i$  che si ottengono come possibili risultati di tutte le misure della variabile dinamica  $\mathcal{A}$ .

Poiché i risultati delle misure di  $\mathcal{A}$  sono dei valori reali, l'operatore  $\hat{A}$  deve necessariamente essere hermitiano:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad (5.21)$$

È anche interessante vedere la struttura dell'operatore  $\hat{A}^2 = \hat{A} \cdot \hat{A}$ :

$$\begin{aligned} \hat{A}^2 &= \hat{A} \cdot \hat{A} \\ &= \sum_i | a_i \rangle a_i \langle a_i | \cdot \sum_j | a_j \rangle a_j \langle a_j | \\ &= \sum_{ij} | a_i \rangle a_i \langle a_i | a_j \rangle a_j \langle a_j | \\ &= \sum_{ij} | a_i \rangle a_i \delta_{ij} a_j \langle a_j | \\ &= \sum_i | a_i \rangle a_i^2 \langle a_i | \end{aligned}$$

In generale la risoluzione di una qualsiasi potenza intera di  $\hat{A}$  prende la forma:

$$\hat{A}^n = \sum_i |a_i\rangle a_i^n \langle a_i| \quad (5.22)$$

che mette in evidenza che  $\hat{A}^n$  ha gli stessi autovettori di  $\hat{A}$  e per autovalori le potenze n-esime degli autovalori di  $\hat{A}$ .

Consideriamo ora lo scarto quadratico medio  $(\Delta\mathcal{A})_\psi$

$$\begin{aligned} (\Delta\mathcal{A})_\psi &\equiv \left[ \left\langle \left( \mathcal{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi \right)^2 \right\rangle_\psi \right]^{1/2} \\ &= \left[ \sum_i p(a_i) \cdot (a_i - \langle \mathcal{A} \rangle)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[ \sum_i p(a_i) \cdot a_i^2 - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[ \sum_i \langle \psi | a_i \rangle \cdot a_i^2 \cdot \langle a_i | \psi \rangle - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[ \langle \psi | \left( \sum_i |a_i\rangle \cdot a_i^2 \cdot \langle a_i| \right) | \psi \rangle - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Otteniamo infine:

$$(\Delta\mathcal{A})_\psi = \left[ \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi^2 \right]^{1/2} \quad (5.23)$$

### 5.2.2 Una precisazione non priva di interesse

Abbiamo già detto che ad ogni stato  $\psi$  del sistema si deve associare un vettore opportuno  $|\psi'\rangle$  dello spazio di Hilbert. Per motivi di coerenza dell'interpretazione fisica del formalismo dobbiamo però scegliere unitaria la norma di questo vettore. Tuttavia può avvenire talvolta di non aver ottemperato a questa regola ma di aver scelto un vettore  $|\psi\rangle$  di norma  $N$  non unitaria:

$$\langle \psi | \psi \rangle = N \neq 1 \quad (5.24)$$

Per liberarci di questo possibile errore basta osservare che il vettore  $|\psi'\rangle$  definito da:

$$|\psi'\rangle \equiv \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{N}} \equiv \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}} \quad (5.25)$$

ha la stessa direzione di  $|\psi\rangle$  ma norma unitaria:

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \frac{\langle \psi | \psi \rangle}{N} = 1 \quad (5.26)$$

Pertanto possiamo scrivere il valore medio di  $\mathcal{A}$  sotto la forma:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_\psi = \langle \psi' | A | \psi' \rangle \quad (5.27)$$

$$= \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (5.28)$$

Questa formula è molto comoda in quanto ci permette di disinteressarci della norma del vettore  $|\psi\rangle$  nel calcolare i valori medi ed in generale tutti gli indici statistici delle distribuzioni delle misure di qualsiasi variabile dinamica.

Ritorniamo adesso alla relazione che intercorre tra l'operatore  $\hat{A}$  e i vettori  $|a_i\rangle$  affrontando il problema in una maniera leggermente diversa. Per questo scopo supponiamo che lo stato di preparazione  $|\psi\rangle$  sia uno degli stati  $|a_i\rangle$  cui compete il valore  $a_h$  per le misure ideali della variabile  $\mathcal{A}$ . In questo caso il valor medio  $\langle \mathcal{A} \rangle$  coincide con  $a_h$  e la deviazione standard delle misure di  $\mathcal{A}$  è nulla:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = a_h \cdot \langle \psi | \psi \rangle \quad (5.29)$$

$$(\Delta \mathcal{A})_\psi^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle_\psi \quad (5.30)$$

$$= \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2 = 0 \quad (5.31)$$

Dall'ultima relazione si ricava:

$$\langle A^2 \rangle_\psi = \langle A \rangle_\psi^2 \quad (5.32)$$

ovvero

$$\frac{\langle \psi | A^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle^2}{\langle \psi | \psi \rangle^2} \quad (5.33)$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi | A | \psi \rangle^2 &= \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi | A^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi | A A | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi | A^\dagger A | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \psi \rangle (\langle \psi | A^\dagger) (A | \psi \rangle) \\ &= \|\psi\| \|A\psi\| \end{aligned}$$

Questo é il caso in cui la disuguaglianza di Schwartz é soddisfatta come eguaglianza e sappiamo che ciò si verifica solo nel caso in cui i due vettori  $|\psi\rangle$  e  $A|\psi\rangle$  sono proporzionali tra di loro:

$$A|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle \quad (5.34)$$

ciò significa che  $|\psi\rangle$  é un autovettore di  $\hat{A}$  con autovalore  $\alpha$ .

Osserviamo ora che in tal caso:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \alpha | \psi \rangle = \alpha \langle \psi | \psi \rangle = \alpha \quad (5.35)$$

Ciò mostra che  $\alpha = a_h$  e che quindi  $|\psi\rangle$  è un autovettore di  $A$  con autovalore  $a_h$

$$\boxed{A|\psi\rangle = a_h|\psi\rangle} \quad (5.36)$$

In definitiva possiamo affermare che:

- *Uno stato per il quale tutte le misure della variabile  $\mathcal{A}$  producono sempre lo stesso risultato è rappresentato nello spazio di Hilbert da un autovettore della osservabile  $A$  con autovalore  $a$ . Gli autovalori di questa osservabile sono tutti e solo i valori ottenibili in una qualsiasi misura di quella osservabile stessa.*
- *Dopo aver eseguito una misura ideale della variabile dinamica  $\mathcal{A}$  che ha prodotto un certo risultato  $a$  il sistema viene a trovarsi in uno stato rappresentato da uno degli autovettori di  $\hat{A}$  appartenenti all'autovalore  $a$ .*

Vediamo ora come si traduce in questo simbolismo la completezza degli stati  $|a_i\rangle$  cioè il fatto che le misure di  $\mathcal{A}$  ci permettono di ottenere la massima informazione sul sistema. A tal fine notiamo che una qualsiasi ampiezza  $\langle\varphi|\psi\rangle$  si può sviluppare negli stati  $\{|a_k\rangle\}$  al seguente modo:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|I|\psi\rangle = \sum_i \langle\varphi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle \quad (5.37)$$

dove con  $I$  abbiamo indicato l'operatore identità dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  degli stati del sistema. Dal confronto tra queste due espressioni ( valide per qualsiasi stato ) ricaviamo la seguente risoluzione dell'identità

$$\boxed{\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \hat{I}} \quad (5.38)$$

che esprime il fatto le misure di  $\mathcal{A}$  formano un sistema completo di informazioni sul sistema fisico. L'operatore lineare  $\hat{A}$  che corrisponde ad una siffatta variabile dinamica sarà indicato da ora in poi con il termine **osservabile**. In termini più formali una osservabile è un operatore lineare dai cui autovettori si può estrarre una " base " dello spazio di Hilbert

## 5.3 Compatibilità tra variabili dinamiche in Meccanica Quantistica

Come si è già detto, la Meccanica Classica ammette che sia sempre possibile eseguire misure di qualsivoglia variabile dinamica senza perturbare lo svolgersi

del fenomeno. Per questo motivo la Meccanica Classica non pone mai il problema della compatibilità tra le variabili dinamiche : si suppone che sia sempre possibile eseguire misure simultanee di più variabili dinamiche con precisione infinita senza che la misura di una perturbi la misura di un'altra.

Per quanto riguarda i sistemi microscopici tuttavia abbiamo già notato che non si può mai prescindere dalla perturbazione che la misura arreca al sistema stesso. Per questo motivo possiamo aspettarci che possano esistere delle variabili dinamiche che non possono essere misurate contemporaneamente ( cioè con lo stesso dispositivo sperimentale ) con precisione infinita in quanto può avvenire che la misura di una di queste variabili distrugga le informazioni provenienti da misure dalle altre. Siamo così indotti a dare le seguenti definizioni:

- Diremo compatibili due variabili dinamiche  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  che possono essere misurate contemporaneamente con precisione infinita
- Sono invece incompatibili due variabili dinamiche per le quali non esiste alcun dispositivo ( neanche ideale ) capace di misurarle insieme con infinita precisione.

Esempi banali di variabile dinamica compatibili sono le tre coordinate  $\{x, y, z\}$  di posizione di una particella supposta puntiforme. È invece stato grande merito di Heisenberg aver mostrato l'esistenza nel micromondo di variabili incompatibili mediante l'uso di sottili ragionamenti che mettevano in conto la doppia natura dei sistemi microscopici. Tra le altre cose Heisenberg mostrò come non sia possibile ideare alcun dispositivo capace di misurare con precisione illimitata contemporaneamente una coordinata di posizione ( per esempio  $x$  ) e la relativa componente dell'impulso ( cioè  $p_x$  ) di una particella microscopica.

Invitando lo studente interessato ad una attenta lettura del libro di Heisenberg " *I Principi fisici della Teoria dei Quanti* " descriveremo qui uno di questi " *esperimenti ideali* " che illustra in maniera abbastanza chiara il " *Principio di Indeterminazione* " e cioè l'impossibilità di misurare contemporaneamente con arbitraria precisione sia la posizione che l'impulso di una particella.

### 5.3.1 Misure di posizione e di impulso

Descriveremo adesso un *esperimento ideale* che permette una determinazione semplice della posizione e dell'impulso di una particella. L'esperimento è *ideale* non perchè sia irrealizzabile ma in quanto non tiene conto delle difficoltà costruttive dei dispositivi e degli errori sperimentali sempre in agguato negli esperimenti reali.

Consideriamo dunque un dispositivo che ha prodotto un fascetto di elettroni ben collimato nella direzione  $y$  e con un impulso  $p$  definito con grande accuratezza.

Vogliamo eseguire una misura della coordinata di posizione in una direzione ( diciamo  $x$  ) ortogonale al fascio. A questo scopo facciamo passare il fascio attraverso una fenditura praticata su uno schermo  $\Sigma_1$  perpendicolare alla direzione del fascetto come è mostrato in fig. reffig:ind. Se un elettrone passa attraverso la fenditura la sua coordinata in direzione  $x$  è nota con una precisione  $\Delta x$  uguale alla larghezza  $D$  della fenditura. Tuttavia dopo aver attraversato la fenditura gli elettroni non avranno lo stesso impulso di prima: un reticolo di fotomoltiplicatori disposti su un secondo schermo  $\Sigma_2$  riveleranno che alcuni elettroni saranno emersi dalla fenditura in una direzione , altri in un'altra e così via. Questa situazione è stata descritta come la diffrazione subita dall'onda di materia che accompagna il fascetto nell'attraversare la fenditura. Una ragionevole stima della dispersione angolare del fascio è data dall'angolo  $\alpha$  a cui si forma il primo minimo della figura di diffrazione e che è dato dalla equazione:

$$D \cdot \sin(\alpha) = \lambda \quad (5.39)$$

Tenendo conto della relazione di De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

la 5.39 si mette sotto la forma:

$$D \cdot p \sin(\alpha) = h \quad (5.40)$$

La diffrazione dell'onda di materia implica che l'impulso degli elettroni emergenti dalla fenditura non è perfettamente definito e possiamo assumere come stima plausibile della precisione con cui si conosce la componente dell'impulso lungo la direzione  $x$  il valore:

$$(\Delta p)_x = p \sin(\alpha)$$

Sostituendo questo valore nella 5.40 otteniamo infine:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = h \quad (5.41)$$

La relazione approssimata ?? e le altre simili che si deducono per ogni altra direzione costituiscono le Relazioni di Indeterminazione di Heisenberg per le misure di impulso e di posizione. Queste relazioni esprimono l'impossibilità di conoscere contemporaneamente con precisione arbitrariamente grande una coordinata della particella e le rispettiva componente dell'impulso : se si determina la coordinata  $x$  con una precisione  $\Delta x$  non sarà mai possibile determinare la componente  $p_x$  dell'impulso con una precisione maggiore di  $h/\Delta x$ . Si possono naturalmente congetturare molte altre tecniche per misurare impulso e posizione di una particella di certo più sofisticate di quella descritta sopra ma tutte conducono alle stesse relazioni ?? e tutte fanno impiego contemporaneo dei modelli corpuscolare ed

ondulatorio ( il dualismo onda-corpuscolo ) o della materia o della radiazione. Ci viene il sospetto che le relazioni di indeterminazione 5.41 hanno a che fare con alcune proprietà profonde delle categorie spaziali. Questi problemi saranno affrontati nel capitolo successivo dedicato alle traslazioni di spazio, per il momento ci interessa notare che esistono anche coppie di grandezze che non possono essere misurate contemporaneamente con precisione comunque elevata.

## 5.4 Variabili compatibili

Mostreremo adesso come la compatibilità o la incompatibilità tra due variabili dinamiche si riflette in ben precise relazioni algebriche tra gli operatori lineari che le rappresentano nello spazio di Hilbert degli stati.

Cominciamo con il considerare due variabili dinamiche  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  di un sistema fisico  $\mathcal{S}$  tra loro compatibili. Ciò significa che è possibile misurarle entrambe contemporaneamente (cioè con lo stesso dispositivo di rivelazione) con precisione infinita. Supponiamo di aver eseguito una misura ideale che ha prodotto per  $\mathcal{A}$  valore  $a$  e per  $\mathcal{B}$  il valore  $b$ . In tal caso alla fine della misura il sistema  $\mathcal{S}$  viene a trovarsi in un autostato simultaneo di  $\mathcal{A}$  e di  $\mathcal{B}$ . Questo stato è rappresentato nello spazio di Hilbert da un ket  $| a, b \rangle$  che è contemporaneamente autovettore dei due operatori  $\hat{A}$  e di  $\hat{B}$  :

$$\hat{A}| a, b \rangle = a | a, b \rangle \quad (5.42)$$

$$\hat{B}| a, b \rangle = b | a, b \rangle \quad (5.43)$$

Le osservabili  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , avendo un sistema completo di autovettori in comune, devono commutare tra loro:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad (5.44)$$

Possiamo così affermare che

Se le due variabili dinamiche  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  possono essere misurate contemporaneamente con infinita precisione ( senza che la misura dell'una perturbi l'altra in modo imprevedibile ) esse sono rappresentate nello spazio  $\mathcal{H}$  da due operatori lineari commutanti  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

Come si sa esiste allora un sistema di base di  $\mathcal{H}$  formato dagli autovettori  $\{| a_i, b_j \rangle\}$  comuni ad  $\hat{A}$  e a  $\hat{B}$ . Se questa base è unica si dice che  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  formano un *insieme completo di osservabili compatibili*. In queste condizioni le proprietà dello stato del sistema uscente dalla misura contemporanea di  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono determinate unicamente dai valori  $a_i$  e  $b_j$  misurati per quelle due grandezze. In

altri termini:

- Per conoscere tutte le proprietà fisiche del sistema basta sottoporlo a misure di  $\hat{A}$  e di  $\hat{B}$
- Ogni altra variabile  $\hat{C}'$  che non sia una mera funzione di  $\hat{A}$  e di  $\hat{B}$  non può essere misurata insieme ad  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  con infinita precisione (cioè senza distruggere le informazioni ottenute dalle misure precedenti di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ ). Non è possibile concepire un apparato sperimentale capace di misurare contemporaneamente con precisione infinita le variabili  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ .
- Se eseguiamo delle misure ideali di  $\mathcal{C}'$  sul sistema inizialmente preparato il in un autostato di  $\mathcal{A}$  e di  $\mathcal{B}$  otterremo una serie di risultati la cui distribuzione statistica ha una deviazione standard non nulla  $\Delta\mathcal{C}' \neq 0$

Se invece non vi è una scelta unica di autovettori di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  per formare una base dello spazio di Hilbert allora si può trovare una terza osservabile  $\hat{C}$  commutante con entrambi: si studia in tal caso la struttura dell'insieme degli autovettori comuni ad  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  .....e così via. Continuando in questo modo saremo riusciti a trovare un sistema di variabili compatibili  $\{A, B, C, \dots Z\}$  che godono delle seguenti proprietà:

- Sono hermitiani
- Essi commutano tutti tra di loro
- Esiste uno ed uno solo autovettore (denotato  $|a_i, b_j, c_k, \dots, z_l\rangle$ ) comune ad  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \dots \hat{Z}$  appartenente ai rispettivi autovalori  $\{a_i, b_j, c_k, \dots z_l\}$
- Questi autovettori comuni formano un insieme di vettori ortonormali di  $\mathcal{H}$ :

$$\langle a_i, b_j, c_k, \dots z_l | a_{i'}, b_{j'}, c_{k'}, \dots z_{l'} \rangle = \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \dots \delta_{l,l'} \quad (5.45)$$

- Questi autovettori comuni formano una base in  $\mathcal{H}$ :

$$\boxed{\sum_{i,j,k,\dots,l} |a_i, b_j, c_k, \dots z_l\rangle \langle a_i, b_j, c_k, \dots z_l| = \hat{I}} \quad (5.46)$$

La misura simultanea di queste variabili dinamiche costituisce perciò la massima informazione fisica che possiamo avere sul sistema. Diremo allora che siffatte variabili dinamiche formano un **insieme completo di variabili compatibili** e le osservabili che le rappresentano nello spazio  $\mathcal{H}$  formano un *sistema completo di osservabili compatibili* (S.C.O.C.)

## 5.5 Variabili Dinamiche incompatibili

Consideriamo due variabili dinamiche  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  non compatibili tra loro e siano  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  rispettivamente i due operatori che le rappresentano nello spazio di Hilbert. Questi due operatori non possono commutare tra di loro giacchè in tal caso avrebbero un sistema di autovettori in comune che esprimerebbe la compatibilità già negata delle due variabili dinamiche.

Il commutatore  $[\hat{A}, \hat{B}]$  è un operatore lineare non nullo che, come si prova facilmente, risulta essere antihermitiano:

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}]^\dagger &= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger \\ &= \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \\ &= -[\hat{A}, \hat{B}] \end{aligned}$$

Possiamo pertanto porre:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad \text{dove} \quad \hat{C} = \hat{C}^\dagger \quad (5.47)$$

Proviamo adesso che gli scarti quadrati medi di queste due variabili dinamiche incompatibili sussiste una importante diseuguaglianza che è la traduzione quantitativa delle relazioni di indeterminazione di cui si è detto prima.

Detto  $|\psi\rangle$  un vettore normalizzato dello spazio di Hilbert degli stati del sistema fisico, si ha :

$$\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle = i \langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle \equiv iC_\psi \quad (5.48)$$

Calcoliamo ora il primo membro di questa equazione:

$$\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle = \langle \psi | (AB - BA) | \psi \rangle \quad (5.49)$$

$$= \langle \psi | (AB - B^\dagger A^\dagger) | \psi \rangle \quad (5.50)$$

$$= \langle \psi | AB | \psi \rangle - \langle \psi | (AB)^\dagger | \psi \rangle \quad (5.51)$$

$$= \langle \psi | AB | \psi \rangle - \langle \psi | AB | \psi \rangle^* \quad (5.52)$$

$$= 2i \Im \langle \psi | AB | \psi \rangle \quad (5.53)$$

Otteniamo così:

$$2i \Im \langle \psi | \hat{A}\hat{B} | \psi \rangle = i\bar{C}_\psi \quad (5.54)$$

da cui, prendendo il valore assoluto di entrambi i termini, otteniamo:

$$|\Im \langle \psi | \hat{A}\hat{B} | \psi \rangle| = \frac{1}{2} |\bar{C}_\psi| \quad (5.55)$$

Poniamo ora:

$$|\psi_A\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \quad \text{e} \quad |\psi_B\rangle = \hat{B}|\psi\rangle \quad (5.56)$$

L'eq. 5.55 si mette sotto la forma:

$$|\Im \langle \psi_A | \psi_B \rangle| = \frac{1}{2} |\bar{C}_\psi| \quad (5.57)$$

Applicando alla 5.57 la nota proprietà dei numeri complessi

$$|z| \geq |\Im z|$$

si ottiene:

$$|\langle \psi_A | \psi_B \rangle| \geq \frac{1}{2} |\bar{C}| = \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_\psi| \quad (5.58)$$

Possiamo maggiorare ulteriormente la 5.58 per mezzo della disuguaglianza di Schwarz:

$$[\langle \psi_A | \psi_A \rangle \cdot \langle \psi_B | \psi_B \rangle]^{\frac{1}{2}} \geq |\langle \psi_A | \psi_B \rangle| \quad (5.59)$$

ottenendo:

$$[\langle \psi_A | \psi_A \rangle \cdot \langle \psi_B | \psi_B \rangle]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_\psi| \quad (5.60)$$

Notiamo intanto che:

$$\langle \psi_A | \psi_A \rangle = \langle \psi | \hat{A}^\dagger \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle_\psi \quad (5.61)$$

ed anche:

$$\langle \psi_B | \psi_B \rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle_\psi \quad (5.62)$$

Sostituendo le 5.61 e 5.62 possiamo mettere la 5.60 nella forma:

$$\left[ \langle \hat{A}^2 \rangle_\psi \langle \hat{B}^2 \rangle_\psi \right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi| = \frac{1}{2} |C_\psi| \quad (5.63)$$

Definiamo adesso i due seguenti operatori:

$$\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle A \rangle_\psi \quad \text{e} \quad \Delta \hat{B} = \hat{B} - \langle B \rangle_\psi \quad (5.64)$$

Questi operatori hanno fra loro una relazione di commutazione analoga alla 5.47 che intercorre tra  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  in quanto differiscono da questi ultimi solo per un termine proporzionale all'identità:

$$[\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}] = i \hat{C} \quad (5.65)$$

É evidente allora che per essi soddisfano alla stessa disuguaglianza 5.63:

$$\left[ \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle_\psi \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle_\psi \right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi| \quad (5.66)$$

Osserviamo ora che:

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle_\psi = \langle (\hat{A} - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi \quad (5.67)$$

$$= \langle A^2 \rangle_\psi - \langle \mathcal{A} \rangle_\psi^2 \quad (5.68)$$

$$\equiv (\delta \mathcal{A})_\psi^2 \quad (5.69)$$

rappresenta il quadrato dello scarto quadratico medio delle misure della variabile dinamica  $\mathcal{A}$  eseguite sul sistema preparato nello stato  $|\psi\rangle$ . Similmente il termine:

$$\langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle_\psi \equiv (\delta \mathcal{B})_\psi^2 \quad (5.70)$$

rappresenta il quadrato dello scarto quadratico medio delle misure della osservabile  $\mathcal{B}$  eseguite sul sistema preparato nello stato  $|\psi\rangle$ . Il risultato precedente assume così la forma:

$$\boxed{(\delta \mathcal{A})_\psi \cdot (\delta \mathcal{B})_\psi \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_\psi |} \quad (5.71)$$

che esprime il principio di indeterminazione tipico della Meccanica Quantistica :

Una misura molto precisa di una delle due variabili dinamiche  $\mathcal{A}$  o  $\mathcal{B}$  lascia il sistema in uno stato per il quale le misure dell'altra variabile dinamica hanno un grande scarto quadratico medio.

In altri termini non è possibile misurare con una precisione comunque grande contemporaneamente la due variabili dinamiche . La relazione 5.71 ci permetterà nel capitolo seguente di dare una forma quantitativa alla relazione di indeterminazione di Heisenberg 5.41 già dedotta con un metodo euristico semi-qualitativo.