Introduzione alla Meccanica Quantistica

Prof. G.Giansiracusa

A.A. 2004/2005

Indice

Capitolo 6

Le traslazioni di spazio

In questo capitolo studieremo le proprietà di un sistema quantomeccanico rispetto alle traslazioni dello spazio fisico. Per rendere le formule più semplici prenderemo in considerazione il sistema formato da una sola particella supposta puntiforme. Ammetteremo inoltre che questo semplice sistema abbia analogo classico nel senso che sono sufficienti misure di sola posizione per descrivere tutte le sue proprietà fisiche.

6.1 Operatori di posizione e spettro continuo

6.1.1 Particella in una dimensione

Consideriamo una particella vincolata a muoversi lungo l'asse x. In questo caso tutte le proprietà del sistema possono essere dedotte dalle misure di una sola grandezza: la coordinata x. Tuttavia, poichè questa coordinata può assumere un qualsiasi valore reale, noi saremo costretti a modificarein qualche modo le notazioni precedenti e ad assegnare un significato un poco diverso all'ampiezza di probabilità.
Osserviamo intanto che l'informazione più dettagliata che possiamo ricavare da una misura di posizione, consiste al più nel poter affermare di aver trovato la particella entro un intorno di ampiezza dx infinitesima centrato attorno ad un punto x. In conseguenza possiamo dare significato plausibile soltanto alla probabilità $\delta\mathcal{P}_\psi(x)$ di trovare la particella in quell'intorno una volta che essa era stata preparata nello stato ψ. Poichè questa probabilità è in un certo senso proporzionale a dx, noi scriveremo:

$$\delta\mathcal{P}_\psi(x) \ = \ dx \cdot | \ \langle \ x \ | \ \psi \ \rangle \ |^2 \tag{6.1}$$

La funzione:

$$\psi\,(x) \ \equiv \ \langle \ x \ | \ \psi \ \rangle \tag{6.2}$$

viene ad essere la nuova definizione di ampiezza e verrà indicata nel seguito con il termine *funzione d'onda*. Come si vede essa non è più correlata con la probabilità ma piuttosto il suo modulo quadrato fornisce la densità di probabilità che, avendo preparato la particella in uno stato $|\, \psi \,\rangle$ una misura di coordinata X la lascia in un intorno infinitesimo centrato attorno ad x.
Possiamo definire l'operatore posizione $\hat{X}$ tramite la relazione:

$$\langle\, X \,\rangle_\psi \;=\; \langle\, \psi \,|\, \hat{X} \,|\, \psi \,\rangle \tag{6.3}$$

che può essere riscritta al seguente modo

$$\begin{aligned}
\langle\, X \,\rangle_\psi \;&=\; \int \; x \; \delta\mathcal{P}_\psi(x) && (6.4)\\
&=\; \int_\infty^\infty \; dx \; |\, \langle\, x \,|\, \psi \,\rangle \,|^2 \; x && (6.5)\\
&=\; \int_\infty^\infty \; dx \; \langle\, \psi \,|\, x \,\rangle \; x \; \langle\, x \,|\, \psi \,\rangle && (6.6)\\
&=\; \langle\, \psi \,| \left(\int_\infty^\infty \; dx \; |\, x \,\rangle \; x \; \langle\, x \,| \right) |\, \psi \,\rangle && (6.7)
\end{aligned}$$

Dal confronto con l'equazione 6.3 ricaviamo l'espressione simbolica per l'operatore posizione:

$$\hat{X} \;=\; \int_\infty^\infty \; dx \; |\, x \,\rangle \; x \; \langle\, x \,| \tag{6.8}$$

Come abbiamo già fatto altrove, vogliamo interpretare il simbolo $|\, x' \,\rangle$ come autovettore di $\hat{X}$ con autovalore x':

$$\hat{X} \;|\, x' \,\rangle \;=\; x' \;|\, x' \,\rangle \tag{6.9}$$

ma qui ci imbattiamo in una serie di difficoltà legate al fatto che le misure di posizione possono essere tutti i valori dell'asse reale $(\, -\infty, \; \infty \,)$.
Ricordiamo intanto che la quantità:

$$\langle\, x' \,|\, x'' \,\rangle \tag{6.10}$$

deve indicare l'ampiezza che , avendo preparato la particella nell'intorno infinitesimo dx del punto x'', una misura di posizione la rivela nell'intorno infinitesimo del punto x'. Appare chiaro allora che se x ed x non appartengono allo stesso intorno infinitesimo (vale a dire se $x' \;\neq\; x''$) questa probabilità è nulla e così dobbiamo porre:

$$\langle\, x' \,|\, x'' \,\rangle \;=\; 0 \qquad \text{nel caso in cui} \qquad x' \;\neq\; x'' \tag{6.11}$$

Si pone adesso il problema di valutare l'ampiezza 6.10 quando x' ed x'' appartengono allo stesso intorno (cioè quando $x' \;=\; x''$)

Assumendo valida l'equazione 6.8 possiamo scrivere:

$$\hat{X} \mid x' \rangle \;=\; \int_{\infty}^{\infty} dx \mid x \rangle \, x \, \langle x \mid x' \rangle \tag{6.12}$$

$$\approx\; \delta x \mid x' \rangle \, x' \, \langle x' \mid x' \rangle \tag{6.13}$$

Vediamo allora che il confronto con 6.9 implicherebbe:

$$\langle x' \mid x' \rangle \;\approx\; \frac{1}{\delta x} \qquad \longrightarrow\; \infty \tag{6.14}$$

Come si vede si tratta di una " *funzione* " ben strana, essendo ovunque nulla tranne nel punto $x' \;=\; x''$ in cui tende ad infinito. In conseguenza di ciò i simboli $\mid x \rangle$, avendo norma infinita, non possono a stretto rigore essere considerati vettori di uno spazio di Hilbert. Ciò non ostante noi prenderemo in considerazione questi oggetti come utili simboli in quanto è possibile scrivere un qualsiasi $\mid \psi \rangle$ dello spazio di Hilbert come combinazione lineare univoca di essi. Dobbiamo però ricordarci di attribuire ad essi delle proprietà formali piuttosto singolari. Per comprendere questo punto importante ricordiamo di aver fatto l'ipotesi che le misure di posizione formano un insieme completo di informazioni. Ciò implica che, per ogni stato $\mid \psi \rangle$ in cui è stata preparata la particella, possiamo scrivere:

$$1 \;=\; \int_{\infty}^{\infty} \delta P_{\psi}(x) \;=\; \int_{\infty}^{\infty} dx \mid \langle x \mid \psi \rangle \mid^2 \tag{6.15}$$

$$=\; \int_{\infty}^{\infty} dx \, \langle \psi \mid x \rangle \langle x \mid \psi \rangle \tag{6.16}$$

Da ciò segue la risoluzione dell'identità in termini degli "*autostati di posizione*":

$$I \;=\; \int_{\infty}^{\infty} \mid x \rangle \, dx \, \langle x \mid \tag{6.17}$$

Se applichiamo questa risoluzione ad una funzione d'onda otteniamo in maniera formale:

$$\langle x' \mid \psi \rangle \;=\; \langle x' \mid I \mid \psi \rangle \;=\; \int_{\infty}^{\infty} dx \, \langle x' \mid x \rangle \langle x \mid \psi \rangle \tag{6.18}$$

ovvero:

$$\psi(x') \;=\; \int_{\infty}^{\infty} dx \, \langle x' \mid x \rangle \, \psi(x) \tag{6.19}$$

In altri termini, la " *funzione* " estrae da una funzione $\psi(x)$ integranda il suo valore calcolato in $x = x'$. Un'altra notevole proprietà formale si ottiene ponendo nella precedente relazione $\psi(x) \; = \; 1$:

$$\int_{\infty}^{\infty} dx \; \langle \; x' \mid x \; \rangle \; = \; 1 \tag{6.20}$$

Mostreremo tra poco che la funzione $\langle \; x' \mid x'' \; \rangle$ dipende realmente dalla differenza $(x''-x')$; per questo motivo da qui in poi essa sarà indicata con il simbolo:

$$\langle \; x' \mid x'' \; \rangle \; = \; \delta(x'' - x') \tag{6.21}$$

che è noto come *funzione " delta " di Dirac*

6.1.2 Proprietà della delta di Dirac

Elenchiamo alcune proprietà utili della funzione delta di Dirac.

$$\int_{\infty}^{\infty} dx \; \delta(x - x') \; = \; 1 \tag{6.22}$$

$$\int_{\infty}^{\infty} dx \; \delta(x - x')\psi(x) \; = \; \psi(x') \tag{6.23}$$

$$\delta(-x) \; = \; \delta(x) \tag{6.24}$$

$$\delta(\alpha x) \; = \; \frac{1}{|\alpha|} \; \delta(x) \tag{6.25}$$

$$f(x) \; \delta(x - a) \; = \; f(a) \; \delta(x - a) \tag{6.26}$$

$$x \; \delta(x) \; = \; 0 \tag{6.27}$$

Una interessante rappresentazione della funzione δ di Dirac è la seguente:

$$\delta\left(x'' - x'\right) \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; e^{ik(x''-x')} \tag{6.28}$$

6.1.3 Particella libera nello spazio

Le osservazioni precedenti sul problema unidimensionale si generalizzano senza difficoltà ad un sistema formato da una particella libera di muoversi in tutto lo spazio. Nel caso in cui la particella ha analogo classico sono sufficienti le misure delle tre coordinate $(x, y, z) \equiv \mathbf{r}$ di posizione per descrivere tutte le sue proprietà fisiche. Abbiamo perciò bisogno di introdurre tre operatori delle coordinate spaziali della particella : $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ che formano un insieme completo di osservabili compatibili:

$$[X, Y] \; = \; [X, Z] \; = \; [Z, Y] \; = \; 0 \tag{6.29}$$

Indichiamo con $|\, \mathbf{r}' \,\rangle \equiv |\, x', y', z' \,\rangle$ gli autovettori comuni a queste tre osservabili:

$$
\begin{aligned}
\hat{X} \,|\, \mathbf{r}' \,\rangle &= x' \,|\, \mathbf{r}' \,\rangle && (6.30)\\
\hat{Y} \,|\, \mathbf{r}' \,\rangle &= y' \,|\, \mathbf{r}' \,\rangle && (6.31)\\
\hat{Z} \,|\, \mathbf{r}' \,\rangle &= z' \,|\, \mathbf{r}' \,\rangle && (6.32)\\
& && (6.33)
\end{aligned}
$$

Questi vettori rappresentano gli autostati di posizione della particella, cioè gli stati per i quali si sa che la posizione della particella è contenuta in un intorno di volume infinitesimo $dV \equiv d^3r \equiv \; dx\ dy\ dz$ centrato attorno al punto di coordinate $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
L'ampiezza $\langle\, r \,|\, \psi \,\rangle$ è definita in modo tale che l'espressione:

$$\delta\mathcal{P}_\psi(\mathbf{r}) = |\, \langle\, \mathbf{r} \,|\, \psi \,\rangle \,|^2 \, d^3r \qquad (6.34)$$

produce la probabilità che una misura di posizione eseguita sulla particella preparata nello stato $|\, \psi \,\rangle$ la rivela in un intorno infinitesimo centrato attorno ad $\mathbf{r}$. Questa ampiezza viene indicata col termine funzione d'onda:

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle\, \mathbf{r} \,|\, \psi \,\rangle \qquad (6.35)$$

Gli autovettori di posizione a rigore non possono far parte dello spazio di Hilbert in quanto sono normalizzati a delta:

$$
\begin{aligned}
\langle\, \mathbf{r}' \,|\, \mathbf{r}'' \,\rangle &\equiv \langle\, x', y', z' \,|\, x'', y'', z'' \,\rangle = \langle\, x' \,|\, x'' \,\rangle \langle\, y' \,|\, y'' \,\rangle \langle\, z' \,|\, z'' \,\rangle && (6.36)\\
&= \delta(x'' - x')\ \delta(y'' - y')\ \delta(z'' - z') && (6.37)\\
&\equiv \delta^3(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') && (6.38)
\end{aligned}
$$

ma costituiscono una base dello spazio di Hilbert degli stati:

$$\int_{\infty}^{\infty} d^3r \,|\, \mathbf{r} \,\rangle\langle\, \mathbf{r} \,| = I \qquad (6.39)$$

Ciò significa che ogni vettore $|\, \psi \,\rangle$ normalizzabile dello spazio di Hilbert si può rappresentare come come combinazione lineare infinita di autovettori di posizione:

$$
\begin{aligned}
|\, \psi \,\rangle = I \,|\, \psi \,\rangle &= \int_{\infty}^{\infty} d^3r \,|\, \mathbf{r} \,\rangle\langle\, \mathbf{r} \,|\, \psi \,\rangle && (6.40)\\
&= \int_{\infty}^{\infty} d^3r \,|\, \mathbf{r} \,\rangle\, \psi(\mathbf{r}) && (6.41)
\end{aligned}
$$

Una qualsiasi ampiezza $\langle \varphi \mid \psi \rangle$ può essere valutata per mezzo di integrali di funzioni d'onda:

$$\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int_{\infty}^{\infty} d^3r \, \langle \varphi \mid \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} \mid \psi \rangle \tag{6.42}$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} d^3r \, \varphi(\mathbf{r})^* \psi(\mathbf{r}) \tag{6.43}$$

In particolare per un $\mid psi \rangle$ che rappresenta uno stato fisico della particella si ha:

$$\langle \psi \mid \psi \rangle = \int_{\infty}^{\infty} d^3r \, \psi(\mathbf{r})^* \psi(\mathbf{r}) \tag{6.44}$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} d^3r \mid \psi(\mathbf{r}) \mid^2 < \infty \tag{6.45}$$

Le funzioni d'onda degli stati fisici della particella devono perciò essere di quadrato sommabile: $\psi(r) \in \ell^2$. Se inoltre lo stato $\mid \psi \rangle$ è stato normalizzato correttamente si avrà:

$$\int_{\infty}^{\infty} d^3r \mid \psi(\mathbf{r}) \mid^2 = 1 \tag{6.46}$$

Nella rappresentazione delle coordinate il calcolo del valor medio di una variabile dinamica A procede al seguente modo:

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi \mid A \mid \psi \rangle = \langle \psi \mid I \; A \; I \mid \psi \rangle \tag{6.47}$$

$$= \int d^3r' \int d^3r'' \, \langle \psi \mid \mathbf{r}'' \rangle \langle \mathbf{r}'' \mid A \mid \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' \mid \psi \rangle \tag{6.48}$$

$$= \int d^3r' \int d^3r'' \, \langle \psi \mid \mathbf{r}'' \rangle \langle \mathbf{r}'' \mid A \mid \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' \mid \psi \rangle \tag{6.49}$$

$$= \int d^3r' \int d^3r'' \, \psi(\mathbf{r}'')^* \, \langle \mathbf{r}'' \mid A \mid \mathbf{r}' \rangle \, \psi(\mathbf{r}') \tag{6.50}$$

$$\tag{6.51}$$

Come si vede per il calcolo di $\langle A \rangle_\psi$ è necessario conoscere gli elementi di matrice dell'operatore $hatA$ nella base degli autostati di posizione: $\langle \mathbf{r}'' \mid A \mid \mathbf{r}' \rangle$. In particolare per l'operatore X di una delle coordinate di spazio si ha:

$$\langle \mathbf{r}'' \mid X \mid \mathbf{r}' \rangle = x' \, \langle \mathbf{r}'' \mid \mathbf{r}' \rangle = x' \, \delta\,(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \tag{6.52}$$

Sostituendo nella espressione precedente:

$$\langle\ X\ \rangle_\psi\ =\ \int d^3r' \int d^3r''\ \psi(\mathbf{r}'')^*\ x'\ \delta\,(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\ \psi(\mathbf{r}') \tag{6.53}$$

$$=\ \int d^3r'\ \psi(\mathbf{r}')^*\ x'\ \psi(\mathbf{r}') \tag{6.54}$$

$$=\ \int d^3r'\ |\ \psi(\mathbf{r}')\ |^2\ x' \tag{6.55}$$

che è l'espressione corretta per il valor medio di una coordinata di posizione. Si ottengono naturalmente simili risultati per le altre coordinate e noi possiamo sintetizzarli tutti nella seguente relazione vettoriale:

$$\langle\ \mathbf{R}\ \rangle_\psi\ =\ \int d^3r'\ |\ \psi(\mathbf{r}')\ |^2\ \mathbf{r}' \tag{6.56}$$

6.2 Le proprietà delle traslazioni di spazio

Assegnato un sistema di coordinate cartesiane $\{Oxyz\}$ possiamo rappresentare ogni punto P dello spazio fisico con il suo raggio vettore $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$.
Una traslazione di spazio $\mathfrak{T}_\mathbf{d}$ di spostamento $\mathbf{d}$ è una operazione che ad ogni punto $\mathbf{r}$ associa un altro punto $\mathbf{r}'$ secondo la legge:

$$\mathbf{r}'\ \equiv\ \mathcal{T}_\mathbf{d}\ \mathbf{r}\ \equiv\ \mathbf{r}\ +\ \mathbf{d} \tag{6.57}$$

dove $\mathbf{d}$ ẽ uno spostamento costante.
L'insieme $\{\mathfrak{T}\}$ di tutte le traslazioni spaziali forma un gruppo : *Il gruppo delle traslazioni spaziali.*
Infatti esso possiede le seguenti proprietà caratteristiche dei gruppi:

- L'identità $\mathcal{I}$ è la traslazione di spostamento nullo:

$$I\ \ \equiv \mathcal{T}_\mathbf{0} \tag{6.58}$$

- Il prodotto di una traslazione $\mathcal{T}_{\mathbf{d}_1}$ di spostamento $\mathbf{d_1}$ per una traslazione $\mathcal{T}_{\mathbf{d}_2}$ di spostamento $\mathbf{d_1}$ è ancora una traslazione di spostamento $\mathbf{d}_1\ +\ \mathbf{d}_2$:

$$\mathcal{T}_{21}\ \mathbf{r}\ \equiv\ \mathcal{T}_{\mathbf{d}_2} \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{d}_1}\ \mathbf{r} \tag{6.59}$$

$$=\ \mathcal{T}_{\mathbf{d}_2}\,(r\ +\ \mathbf{d}_1) \tag{6.60}$$

$$=\ (\mathbf{r}\ +\ \mathbf{d_1})\ +\ \mathbf{d_2}\ \equiv\ \mathbf{r}\ +\ (\ \mathbf{d_1}\ +\ \mathbf{d_2}\ ) \tag{6.61}$$

$$=\ \mathcal{T}_{(\mathbf{d}_2\ +\mathbf{d}_1)}\ \mathbf{r} \tag{6.62}$$

- Ogni traslazione $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ ha una traslazione inversa ${\mathcal{T}_{\mathbf{d}}}^{-1}$ tale che:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}}\,{\mathcal{T}_{\mathbf{d}}}^{-1} \;=\; {\mathcal{T}_{\mathbf{d}}}^{-1}\,\mathcal{T}_{\mathbf{d}} \;=\; \mathcal{I} \tag{6.63}$$

Si mostra facilmente che:

$${\mathcal{T}_{\mathbf{d}}}^{-1} \;=\; \mathcal{T}_{-\mathbf{d}} \tag{6.64}$$

Poichè la somma vettoriale è commutativa, le traslazioni spaziali sono operazioni commutative:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}_1}\,\mathcal{T}_{\mathbf{d}_2} \;=\; \mathcal{T}_{\mathbf{d}_2}\,\mathcal{T}_{\mathbf{d}_1} \tag{6.65}$$

In altri termini le traslazioni $\{\mathfrak{T}\}$ formano un Gruppo Abeliano (cioè commutativo). Questo gruppo inoltre possiede la notevole proprietà di essere anche un *gruppo continuo*. Con questo si intende dire che appartengono al gruppo anche le traslazioni infinitesime, cioè traslazioni infinitamente prossime all'identità.
Una traslazione infinitesima è caratterizzata cioè da uno spostamento $\delta\mathbf{r}$ infinitesimo:

$$\mathcal{T}_{\delta\mathbf{r}}\,\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \qquad \text{dove} \qquad |\delta\mathbf{r}| \ll\; 1 \tag{6.66}$$

Una proprietà importantissima del gruppo delle traslazioni (come del resto di ogni altro gruppo continuo) è che qualsiasi traslazione finita si può costruire (in infiniti modi) come prodotto di un numero infinito di traslazioni infinitesime. Consideriamo uno spostamento finito $\mathbf{d}$ e dividiamolo in n parti, ciascuna delle quali indichiamo con $\mathbf{u}$. Si ha così:

$$\mathbf{u} \;=\; \frac{\mathbf{d}}{n} \qquad \text{e quindi} \qquad \mathbf{d} \;=\; \overbrace{\mathbf{u} \;+\; \mathbf{u} \;+\ldots\; + \mathbf{u}}^{\text{n volte}} \tag{6.67}$$

Possiamo perciò scrivere la traslazione $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ come prodotto di n traslazioni $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}} \;=\; \overbrace{\mathcal{T}_{\mathbf{u}}\,\mathcal{T}_{\mathbf{u}}\;\ldots\;\mathcal{T}_{\mathbf{u}}}^{\text{n volte}} \;=\; (\;\mathcal{T}_{\mathbf{u}}\;)^n \;=\; \big(\;\mathcal{T}_{\mathbf{d}/n}\;\big)^n \tag{6.68}$$

Questa procedura si può eseguire $\forall\; n$ e perciò ha significato eseguire il limite $n \longrightarrow \infty$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}} \;=\; \lim_{n\longrightarrow\infty} \big(\;\mathcal{T}_{\mathbf{d}/n}\;\big)^n \tag{6.69}$$

nel qual caso le traslazioni $\mathcal{T}_{\mathbf{d}/n}$ tendono a diventare infinitesime.

6.3 Le traslazioni nello spazio degli stati

Vogliamo ora vedere come si riflettono sugli stati quantici di un sistema le operazioni legate alle traslazioni rigide dello spazio fisico.
Consideriamo un apparato sperimentale costituito da una sorgente S che prepara un sistema nello stato $\mid \psi \,\rangle$ e da un dispositivo di rivelazione R di stato $\mid \varphi \,\rangle$. Come abbiamo già detto il processo di misura consiste in un insieme ordinato di operazioni che conducono a determinare l'ampiezza di probabilità $\langle\, \varphi \mid \psi \,\rangle$. Eseguiamo in seguito una traslazione rigida $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ di tutto l'apparato sperimentale $\{S, R\}$. Dopo aver effettuato questa traslazione un apparato sperimentale $\{S', R'\}$ del tutto identico al precedente tranne che per la sua collocazione spaziale nel senso che ogni parte di $\{S', R'\}$ è spostata dello stesso vettore rispetto alla parte corrispondente dell'apparato $\{S, R\}$. La sorgente traslata S' prepara ora il sistema in uno stato $\mid \psi' \,\rangle$ in qualche modo correlato con lo stato non traslato $\mid \psi \,\rangle$ mentre il rivelatore traslato R' è sensibile ad uno stato che chiamiamo $\mid \varphi' \,\rangle$. Se si esegue sull'apparato traslato $\{S', R'\}$ lo stesso insieme di prescrizioni svolto nel dispositivo traslato viene e daterminarsi l'ampiezza $\langle\, \varphi' \mid \psi' \,\rangle$. La questione importante che vogliamo affrontare è quella di stabilire la relazione tra $\langle\, \varphi \mid \psi \,\rangle$ e $\langle\, \varphi' \mid \psi' \,\rangle$
Indichiamo con $U_{\mathbf{d}}$ l'operatore dello spazio $\mathfrak{H}$ degli stati che esegue la corrispondenza $\mid \psi \,\rangle \longrightarrow \mid \psi' \,\rangle$. Questo operatore deve essere lineare perchè ad una combinazione lineare di stati deve far associare una combinazione lineare degli stati corrispondenti con gli stessi coefficienti. L'operatore lineare $U_{\mathbf{d}}$ è l'operatore di traslazione $\mathbf{d}$ nello spazio $\mathfrak{H}$:

$$\mid \psi' \,\rangle \;=\; U_{\mathbf{d}} \mid \psi \,\rangle \qquad \text{e} \qquad \mid \varphi' \,\rangle \;=\; U_{\mathbf{d}} \mid \varphi \,\rangle \tag{6.70}$$

Noi assumeremo che la corrispondenza $U_{\mathbf{d}} \rightleftharpoons \mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ sia biunivoca.
Elenchiamo alcune osservazioni:

- Per ogni esperimento condotto sull'apparato originario esiste un analogo esperimento sull'apparato traslato eseguito con identiche prescrizioni. Perciò se $\mid \psi \,\rangle$ percorre tutto H anche $\mid \psi' \,\rangle$ percorre tutto H ed $U_{\mathbf{d}}$ è definito su tutto H

- Anche se l'affermazione non è del tutto corretta (ma neanche falsa!) noi ammettiamo per motivi fisici che la corrispondenza tra $\mid \psi \,\rangle$ e $\mid \psi' \,\rangle$ sia biunivoca. Ciò implica che l'operatore $U_{\mathbf{d}}$ è dotato di inverso $U_{\mathbf{d}}^{-1}$:

$$\mid \psi \,\rangle \;=\; U_{\mathbf{d}}^{-1} \mid \psi' \,\rangle \qquad \text{e} \qquad \mid \varphi \,\rangle \;=\; U_{\mathbf{d}}^{-1} \mid \varphi' \,\rangle \tag{6.71}$$

- Se assoggettiamo il dispositivo traslato $\{S', R'\}$ alla traslazione inversa $\mathcal{T}_{-\mathbf{d}}$ ritorniamo all'apparato originario $\{S, R\}$ e quindi :

$$| \psi \rangle \; = \; U_{-\mathbf{d}} \, | \psi' \rangle \qquad \text{e} \qquad | \varphi \rangle \; = \; U_{-\mathbf{d}} \, | \varphi' \rangle \tag{6.72}$$

Il confronto tra le rel. 6.71 e 6.72, che sono valide per tutti gli stati, porta a concludere:

$$U_{-\mathbf{d}} \; \equiv \; U_{\mathbf{d}}^{-1} \tag{6.73}$$

Mostreremo adesso che gli operatori $U_{\mathbf{d}}$ possiedono le stesse proprietà di gruppo delle traslazioni spaziali $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$
Abbiamo già visto che, con una traslazione di vettore $\mathbf{d}$ si arriva allo stesso punto raggiunto eseguendo in successione due traslazioni di spostamento $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ rispettivamente, purchè $\mathbf{d} \; = \; \mathbf{d}_1 \; + \; \mathbf{d}_2$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{d}} \; = \; \mathcal{T}_{\mathbf{d}_2} \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{d}_1} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{d} \; = \; \mathbf{d}_1 \; + \; \mathbf{d}_2 \tag{6.74}$$

Se inizialmente il sistema si trovava nello stato ψ, dopo aver eseguito le due traslazioni $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ in successione esso si troverà nello stato ψ' dato da:

$$| \psi' \rangle \; = \; U_{\mathbf{d}_2} \cdot \; U_{\mathbf{d}_1} \, | \psi \rangle \tag{6.75}$$

Indichiamo con $| \psi'' \rangle$ lo stato che si ottiene da $| \psi \rangle$ eseguendo la traslazione equivalente di vettore $\mathbf{d} \; = \; \mathbf{d}_1 \; + \; \mathbf{d}_2$:

$$| \psi'' \rangle \; = \; U_{\mathbf{d}} \, | \psi \rangle \tag{6.76}$$

Tuttavia noi crediamo che lo stato del sistema nel punto finale non debba dipendere dalle modalità con cui quella posizione è stata raggiunta, per cui ammetteremo senz'altro che i due vettori $| \psi' \rangle$ e $| \psi'' \rangle$ rappresentano lo stesso stato fisico. Ciò porta ad imporre che essi differiscano soltanto per un semplice fattore di fase:

$$| \psi'' \rangle \; = \; e^{i\alpha} \, | \psi' \rangle \tag{6.77}$$

È degno di nota il fatto che è sempre possibile associare opportunamente i vettori ket di H agli stai fisici in modo tale da rendere nulla la fase α. Con questa scelta la relazione precedente implica l'eguaglianza tra gli operatori:

$$U_{\mathbf{d}} \; = \; U_{\mathbf{d}_2} \, U_{\mathbf{d}_1} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{d} \; = \; \mathbf{d}_1 \; + \; \mathbf{d}_2 \tag{6.78}$$

La relazione 6.78 corrisponde nello spazio H alla proprietà 6.74 delle traslazioni nello spazio fisico. Una delle conseguenze di questa osservazione è che

> L'insieme degli operatori $U_{\mathbf{d}}$ possiede tutte le proprietà geometriche del gruppo delle traslazioni di spazio $T_{\mathbf{d}}$

Riassumiamo per maggior chiarezza queste proprietà:

- L'insieme $\mathfrak{U}$ degli operatori $\{U_{\mathbf{d}}\}$ è un gruppo
- L'operatore di traslazione di vettore nullo è l'identità dello spazio H:

$$U_{\mathbf{d}=\mathbf{0}} \;=\; \hat{I} \tag{6.79}$$

- Ogni operatore $U_{\mathbf{d}}$ ha un inverso $U_{\mathbf{d}}^{-1}$ dato da:

$$U_{\mathbf{d}}^{-1} \;\equiv\; U_{-\mathbf{d}} \tag{6.80}$$

- Il gruppo $\mathfrak{U}$ è abeliano in quanto lo stato del sistema traslato non può dipendere dall'ordine con cui vengono eseguite due o più traslazioni in successione:

$$U_{\mathbf{d}_2} \cdot \, U_{\mathbf{d}_1} \;=\; U_{\mathbf{d}_1} \cdot \, U_{\mathbf{d}_2} \tag{6.81}$$

- Il gruppo $\mathfrak{U}$ è anche continuo. Pertanto è lecito introdurre nel formalismo anche gli operatori infinitesimi che sono in corrispondenza con le traslazioni infinitesime dello spazio fisico.. Inoltre l'operatore di una traslazione finita si può sempre decomporre nel prodotto di infiniti operatori di traslazione infinitesima:

$$U_{\mathbf{d}} \;=\; \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\, U_{\mathbf{d}/n} \, \right)^n \tag{6.82}$$

A quelle citate bisogna aggiungere la seguente importante proprietà che ora dimostreremo:

- Gli operatori $U_{\mathbf{d}}$ sono unitari:

$$U_{\mathbf{d}}^{-1} \;=\; U_{\mathbf{d}}^{\dagger} \tag{6.83}$$

Per dimostrarlo supponiamo che l'ambiente esterno non influisca sullo svolgersi del processo fisico. In questo caso dobbiamo ammettere che i risultati di un qualsivoglia esperimento non possono dipendere dalla sua locazione spaziale. In altri termini, se l'apparato $\{S' \;,\; R'\}$ differisce dal dispositivo $\{S \;,\; R\}$ soltanto per una traslazione rigida di spostamento $\mathbf{d}$, i risultati sperimentali su $\{S' \;,\; R'\}$ non possono essere differenti dai risultati degli esperimenti eseguiti con prescrizioni identiche su $\{S \;,\; R\}$. Poichè i dati fisici realmente significativi sono le probabilità, siamo condotti a porre:

$$| \, \langle \, \varphi \mid \psi \, \rangle \, |^2 \;=\; | \, \langle \, \varphi' \mid \psi' \, \rangle \, |^2 \tag{6.84}$$

dove

$$| \, \varphi' \, \rangle \;=\; U_{\mathbf{d}} \mid \varphi \, \rangle \qquad | \, \psi' \, \rangle \;=\; U_{\mathbf{d}} \mid \psi \, \rangle \tag{6.85}$$

Naturalmente la relazione 6.84 può avere in linea di principio una delle seguenti due soluzioni:

$$\langle\ \varphi' \mid \psi'\ \rangle\ =\ \langle\ \varphi \mid \psi\ \rangle$$
$$\langle\ \varphi' \mid \psi'\ \rangle\ =\ \langle\ \varphi \mid \psi\ \rangle^*$$

Tuttavia si dimostra che, a causa della continuità del gruppo delle traslazioni è valida solo la prima alternativa. Pertanto ammetteremo qui senza altra discussione che:

$$\langle\ \varphi' \mid \psi'\ \rangle\ \equiv\ \langle\ \varphi \mid U_{\mathbf{d}}^\dagger\, U_{\mathbf{d}} \mid \psi\ \rangle\ =\ \langle\ \varphi \mid \psi\ \rangle\ =\ \langle\ \varphi \mid I \mid \psi\ \rangle \tag{6.86}$$

Questa relazione, dovendo valere per tutti i vettori $\mid \psi\ \rangle$ e $\mid \varphi\ \rangle$ implica:

$$U_{\mathbf{d}}^\dagger\, U_{\mathbf{d}}\ =\ I \tag{6.87}$$

che è identica alla rel. 6.83.
In altri termini, gli operatori $U_{\mathbf{d}}$ lasciano invariato il prodotto scalare e sono pertanto unitari.

6.3.1 Le traslazioni infinitesime nello spazio degli stati

Consideriamo una traslazione spaziale di spostamento $\epsilon\ =\ \epsilon \cdot\ \hat{\mathbf{u}}$ infinitesimo nella direzione di versore $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\mathcal{T}_\epsilon\, \mathbf{r}\ =\ \mathbf{r}\ + \epsilon \qquad \text{dove} \qquad \mid \epsilon \mid \ll 1 \tag{6.88}$$

L'operatore U_ϵ che rappresenta questa traslazione nello spazio di Hilbert degli stati deve modificare di infinitamente poco un qualsiasi vettore di stato cui esso è applicato. Scriveremo pertanto:

$$U_\epsilon \mid \psi\ \rangle\ =\ \mid \psi\ \rangle\ +\ \mid \delta\psi\ \rangle \qquad \text{dove} \qquad \mid \langle\ \delta\psi \mid \delta\psi\ \rangle \mid\ \sim\ \epsilon \ll 1 \tag{6.89}$$

In altri termini l'operatore U_ϵ differisce dall'identità per un termine proporzionale ad ϵ:

$$U_\epsilon\ =\ I\ -\ i\, \epsilon\, G_{\hat{u}} \tag{6.90}$$

dove G_u è un operatore lineare dipendente dalla direzione dello spostamento ma non dal parametro di piccolezza ϵ.
Mostriamo una interessante proprietà di $G_{\hat{u}}$.
Osserviamo:

$$I \;=\; U_{-\epsilon}\, U_{\epsilon} \tag{6.91}$$
$$=\; (I \;-\; i\,\epsilon\, G_{-\hat{u}})\;(I \;-\; i\,\epsilon\, G_{\hat{u}}) \tag{6.92}$$
$$=\; I \;-i\,\epsilon\,(G_{-\hat{u}} \;+\; G_{\hat{u}}) \;+\; O(\epsilon^2) \tag{6.93}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore in ϵ otteniamo pertanto:

$$G_{-\hat{u}} \;=\; -\, G_{\hat{u}} \tag{6.94}$$

Possiamo così mettere l'inverso dell'operatore 6.90 sotto la forma:

$$U_{\epsilon}^{-1} \;=\; U_{-\epsilon} \;=\; I \;+\; i\,\epsilon\, G_{\hat{u}} \tag{6.95}$$

Con la definizione 6.90 si mostra facilmente che l'operatore $G_{\hat{u}}$ viene ad essere hermitiano:

$$G_{\hat{\mathbf{u}}} \;=\; G_{\hat{\mathbf{u}}}^{\dagger} \tag{6.96}$$

Infatti:
l'equazione hermitiana coniugata della 6.90 è:

$$U_{\epsilon}^{\dagger} \;=\; I \;+\; i\,\epsilon\, G_{u}^{\dagger} \tag{6.97}$$

mentre l'inversa della 6.90 si scrive:

$$U_{\epsilon}^{-1} \;=\; U_{-\epsilon} \;=\; I \;+\; i\,\epsilon\, G_{u} \tag{6.98}$$

L'unitarietà degli operatori di traslazione:

$$U_{\epsilon}^{\dagger} \;=\; U_{\epsilon}^{-1} \tag{6.99}$$

impone che le due relazioni 6.97 e 6.98 devono essere identiche e ciò implica la validità della eq. 6.96.
L'operatore $G_{\hat{\mathbf{u}}}$ costituisce il generatore delle traslazioni infinitesime lungo la direzione $\hat{\mathbf{u}}$ e gioca un ruolo importantissimo nel contesto della teoria quanto-meccanica. Per motivi che appariranno più chiari in seguito è preferibile introdurre nella definizione 6.90 un operatore $P_{\hat{\mathbf{u}}}$ proporzionale a $G_{\hat{\mathbf{u}}}$:

$$P_{\hat{\mathbf{u}}} \;\equiv\; \hbar\, G_{\hat{u}} \tag{6.100}$$

dove $\hbar$ è una costante da aggiustare opportunamente attribuendole le dimensioni fisiche di una azione.
Possiamo allora riscrivere la traslazione infinitesima 6.90 sotto la forma :

$$U_{\epsilon} \;=\; I \;-\; \frac{i}{\hbar}\,\epsilon\, P_{\hat{u}} \tag{6.101}$$

dove $P_{\hat{u}}$ è, come $G_{\hat{\mathbf{u}}}$, un operatore hermitiano

$$P_{\hat{\mathbf{u}}} \; = \; P_{\hat{\mathbf{u}}}^{\dagger} \tag{6.102}$$

i cui autovalori hanno le dimensioni dell'impulso. Noi ammetteremo che esso sia una osservabile. L'operatore $P_{\hat{\mathbf{u}}}$ gioca nel contesto quanto-meccanico lo stesso ruolo che la variabile dinamica impulso gioca nella formulazione hamiltoniana della Meccanica Classica . Per questo motivo chiameremo fin da ora *impulso* l'operatore $P_{\hat{\mathbf{u}}}$. Naturalmente resta da affrontare il problema di assegnare il corretto valore alla costante $\hbar$ affinchè nel limite classico gli autovalori di $P_{\hat{\mathbf{u}}}$ coincidano con i valori numerici dell'impulso definito nel contesto della Meccanica Classica . Noi ammetteremo che $P_{\hat{\mathbf{u}}}$ sia una osservabile, attribuendo così una particolare importanza al suo problema agli autovalori:

$$P_{\hat{\mathbf{u}}} \mid p' \,\rangle \; = \; p' \mid p' \,\rangle \tag{6.103}$$

dove p' rappresenta un suo autovalore e $\mid p' \,\rangle$ uno dei relativi autovettori.
Il generatore di traslazioni lungo una direzione $\hat{u}$ arbitraria si può esprimere tramite i generatori di traslazioni lungo tre direzioni scelte, che possono essere quelle degli assi coordinati $\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}$ di un sistema cartesiano ortogonale.
Infatti, poniamo:

$$\begin{aligned} \epsilon \; &= \; \epsilon \, \hat{u} \; = \; \epsilon_x \, \hat{x} \; + \; \epsilon_y \, \hat{y} \; + \; \epsilon_z \, \hat{z} \\ &= \; \epsilon \, \left(u_x \, \hat{x} \; + \; u_y \, \hat{y} \; + \; u_z \, \hat{z} \right) \end{aligned}$$

dove $\hat{u} \; = \; (\; u_x,\ u_y,\ u_z\;)$. Possiamo allora scrivere:

$$U_{\epsilon} \; = \; U_{\epsilon_x \hat{x}} \, U_{\epsilon_y \hat{y}} \, U_{\epsilon_z \hat{z}} \tag{6.104}$$

Sostituendo in questa l'eq. 6.101 otteniamo:

$$I \; - \; \frac{i}{\hbar} \, \epsilon \, P_{\hat{u}} \; = \; \left(I \; - \; \frac{i}{\hbar} \, \epsilon_x \, P_{\hat{x}} \right) \, \left(I \; - \; \frac{i}{\hbar} \, \epsilon_y \, P_{\hat{y}} \right) \, \left(I \; - \; \frac{i}{\hbar} \, \epsilon_z \, P_{\hat{z}} \right) \tag{6.105}$$

che a meno di infinitesimi di ordine superiore in ϵ produce:

$$\begin{aligned} \epsilon \, P_{\hat{u}} \; &= \; \epsilon_x \, P_{\hat{x}} \; + \; \epsilon_y \, P_{\hat{y}} \; + \; \epsilon_z \, P_{\hat{z}} \\ &= \; \epsilon \cdot (\; u_x \, P_{\hat{x}} \; + \; u_y \, P_{\hat{y}} \; + \; u_z \, P_{\hat{z}} \;) \end{aligned}$$

Poichè questa relazione vale per ogni valore di ϵ ne concludiamo che:

$$P_{\hat{u}} \; = \; u_x \, P_{\hat{x}} \; + \; u_y \, P_{\hat{y}} \; + \; u_z \, P_{\hat{z}} \tag{6.106}$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Pochè le traslazioni formano un gruppo commutativo, i tre operatori $P_x,\ P_y,\ P_z$

devono necessariamente commutare tra loro:

$$[P_x \ , \ P_y] \ = \ [P_x \ , \ P_z] \ = \ [P_y \ , \ P_z] \ = \ 0 \tag{6.107}$$

Infatti per due traslazioni infinitesime di vettori $\mathbf{a} \ = \ a\hat{x}$ e $\mathbf{b} \ = \ b\hat{y}$ si ha:

$$U_{\mathbf{a}} \, U_{\mathbf{b}} \ = \ U_{\mathbf{b}} \, U_{\mathbf{a}} \tag{6.108}$$

da cui:

$$\left(I \ - \ \frac{i}{\hbar} \ a \ P_{\hat{x}}\right) \ \left(I \ - \ \frac{i}{\hbar} \ b \ P_{\hat{y}}\right) \ = \ \left(I \ - \ \frac{i}{\hbar} \ b \ P_{\hat{y}}\right) \ \left(I \ - \ \frac{i}{\hbar} \ a \ P_{\hat{x}}\right) \tag{6.109}$$

Sviluppando i termini di questa relazione otteniamo infine:

$$P_{\hat{x}} \ P_{\hat{y}} \ = \ P_{\hat{y}} \ P_{\hat{x}} \tag{6.110}$$

Risultati del tutto simili valgono per le altre componenti dell'operatore $\mathbf{P}$. Possiamo sintetizzare tutti queste relazioni nell'unica formula:

$$P_i \ P_j \ = \ P_j \ P_i \tag{6.111}$$

dove come usuale si pone $P_1 \ \equiv \ P_x$, $P_2 \ \equiv \ P_y$, e $P_3 \ \equiv \ P_z$. Le variabili dinamiche connesse a queste tre osservabili pertanto sono compatibili e possono essere misurate contemporaneamente con precisione infinita. Nel caso in cui la particella ha analogo classico le tre osservabili $P_x, \ P_y, \ P_z$ formano da sole un *sistema completo di osservabili compatibili* ed hanno perciò un sistema unico di autovettori comuni che formano una base dello spazio di Hilbert:

$$P_x \mid p'_x, \ p'_y, \ p'_z \ \rangle \ = \ p'_x \mid p'_x, \ p'_y, \ p'_z \ \rangle \tag{6.112}$$

$$P_y \mid p'_x, \ p'_y, \ p'_z \ \rangle \ = \ p'_y \mid p'_x, \ p'_y, \ p'_z \ \rangle \tag{6.113}$$

$$P_z \mid p'_x, \ p'_y, \ p'_z \ \rangle \ = \ p'_z \mid p'_x, \ p'_y, \ p'_z \ \rangle \tag{6.114}$$

Si mostra facilmente che i tre numeri $p'_x, \ p'_y, \ p'_z$, sono le componenti di un vettore $\mathbf{p}' \ = \ \left(p'_x, \ p'_y, \ p'_z\right)$. Per questo motivo possiamo definire le tre osservabili $P_x, \ P_y, \ P_z$ come le componenti secondo gli assi $\hat{x}, \ \hat{y}, \ \hat{z}$ dell'operatore vettoriale $\mathbf{P} \ = \ (P_x, \ P_y, \ P_z)$. Le tre equazioni agli autovalori 6.112 possono quindi essere sintetizzate nell'unica equazione:

$$\mathbf{P} \mid \ \mathbf{p}' \ \rangle \ = \ \mathbf{p}' \mid \ \mathbf{p}' \ \rangle \qquad \text{dove} \qquad \mid \ \mathbf{p}' \ \rangle \ \equiv \ \mid \ p'_x, p'_y, p'_z \ \rangle \tag{6.115}$$

Con questa definizione la rel. 6.106 prende la forma di un prodotto scalare:

$$P_{\hat{u}} \ = \ \hat{u} \ \cdot \ \mathbf{P} \tag{6.116}$$

mentre la 6.101 si può scrivere:

$$U_\epsilon \;=\; I \;-\; \frac{i}{\hbar}\,\epsilon \;\cdot\; \mathbf{P} \tag{6.117}$$

$$\;=\; I \;-\; \frac{i}{\hbar}\,\epsilon\,\hat{\mathbf{u}} \;\cdot\; \mathbf{P} \tag{6.118}$$

6.3.2 Le traslazioni finite

Abbiamo già mostrato che una traslazione finita può essere messa sotto forma di un prodotto infinito di traslazioni infinitesime. Sostituendo nella 6.82 la rel. 6.117 otteniamo la rappresentazione formale nello spazio degli stati della traslazione finita di spostamento $\mathbf{d} \;=\; d\;\hat{u}$:

$$U_{\mathbf{d}} \;=\; \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(I \;-\; \frac{i}{\hbar}\,\frac{\mathbf{d}}{n} \;\cdot\; \mathbf{P} \right)^n \tag{6.119}$$

Per trovare una espressione formale utile di questo operatore applichiamolo ad un autovettore dell'impulso:

$$U_{\mathbf{d}} \mid p' \,\rangle \;=\; \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(I \;-\; \frac{i}{\hbar}\,\frac{\mathbf{d}}{n} \;\cdot\; \mathbf{P} \right)^n \mid \mathbf{p}' \,\rangle \tag{6.120}$$

$$\;=\; \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(I \;-\; \frac{i}{\hbar}\,\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{p}'}{n} \right)^n \mid p' \,\rangle \tag{6.121}$$

$$\;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}\;\mathbf{d}\;\cdot\;\mathbf{p}'} \mid \mathbf{p}' \,\rangle \tag{6.122}$$

Ciò prova che $U_{\mathbf{d}}$, avendo gli stessi autovettori di $P_{\hat{u}}$ ed autovalori $exp\left(-\frac{i}{\hbar}\;d\;p'\right)$, è la seguente funzione dell'impulso:

$$U_{\mathbf{d}} \;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}\;d\;P_{\hat{u}}} \tag{6.123}$$

$$\;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}\;\mathbf{d}\cdot\mathbf{P}} \tag{6.124}$$

Tra l'altro la relazione 6.122 implica fisicamente che una traslazione applicata ad un sistema preparato in un autostato dell'impulso non produce alcun cambiamento osservabile. Ciò è compatibile con il risultato classico secondo cui una traslazione non modifica l'impulso del sistema.
Osservazione:
La stessa traslazione si può anche ottenere componendo tre traslazioni di spostamenti rispettivi $d_x\hat{x}$, $d_y\hat{y}$, $d_z\hat{z}$:

$$U_{\mathbf{d}} \;=\; e^{\left(\;-\frac{i}{\hbar}\;d_x\;P_x\;\right)} \cdot e^{\left(\;-\frac{i}{\hbar}\;d_y\;P_y\;\right)} \cdot e^{\left(\;-\frac{i}{\hbar}\;d_z\;P_z\;\right)} \tag{6.125}$$

Il confronto con la relazione precedente produce l'interessante eguaglianza:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{P}} \ = \ e^{(\ -\frac{i}{\hbar}\ d_x\ P_x\ )} \cdot e^{(\ -\frac{i}{\hbar}\ d_y\ P_y\ )} \cdot e^{(\ -\frac{i}{\hbar}\ d_z\ P_z\ )} \tag{6.126}$$

la cui validità risiede nel fatto che le tre componenti dell'impulso commutano tre loro.

6.4 Punto di vista passivo delle Traslazioni

Una maniera alternativa di descrivere una traslazione consiste nell'eseguire una traslazione rigida del sistema di riferimento connesso con l'osservatore lasciando immutati gli apparati sia di preparazione sia di rivelazione.
Indichiamo con Σ il sistema di riferimento non traslato e con Σ' il sistema di riferimento assoggettato alla traslazione rigida di vettore $\vec{d}$:

$$\Sigma' = \mathcal{T}(\mathbf{d})\Sigma \tag{6.127}$$

In questo caso in seguito alla traslazione non cambiano né lo stato $|\ \psi\ \rangle$ in cui il sistema /'e stato preparato né lo stato $\langle\ \varphi\ |$ cui é sensibile l'apparato di rivelazione.
Ció che cambia invece é la descrizione delle variabili dinamiche da parte dell'osservatore legato al sistema di riferimento. Indichiamo con A una osservabile descritta dall'osservatore legato a Σ e con A' la corrispondente variabile dinamica descritta da Σ' (cioé A e A' sono definite dalle stesse prescrizioni ma in sistemi di riferimento diversi.
Si tratta ora di stabilire la relazione tra A e A' . Osserviamo a questo proposito che i risultati sperimentali dipendono solo dalla geometria relativa tra sorgente e rivelatore e che perció se si eseguono insieme la traslazione di tutto il sistema fisico e la traslazione del sistema di riferimento il risultato finale non puó essere distinguibile dal sistema fisico originario (se lo spazio é veramente omogeneo come deve essere per un sistema isolato). In particolare dopo una siffatta traslazione globale i valori medi delle variabili dinamiche non possono cambiare:

$$\langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \tag{6.128}$$

dove $|\ \psi'\ \rangle = U_{\mathbf{d}}|\ \psi\ \rangle$. Si ricava cosí

$$\langle\psi|U_{\mathbf{d}}^{\dagger}A'U_{\mathbf{d}}|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \tag{6.129}$$

Questo risultato, valendo qualunque sia lo stato $|\ \psi\ \rangle$, implica:

$$U_{\mathbf{d}}^{\dagger}\ A'\ U_{\mathbf{d}} \ = \ A \tag{6.130}$$

ovvero

$$A' \ = \ U_{\mathbf{d}}\ A\ U_{\mathbf{d}}^{\dagger} \tag{6.131}$$

$$= \ U_{\mathbf{d}}\ A\ U_{\mathbf{d}}^{-1} \tag{6.132}$$

$$= \ U_{\mathbf{d}}\ A\ U_{-\mathbf{d}} \tag{6.133}$$

6.4.1 Come cambia l'operatore di posizione in una traslazione

Vediamo ora l'effetto di una traslazione sulla componente X dell'operatore posizione $\mathbf{R}$. Applicando la 6.132 all'operatore X otteniamo:

$$X' \;=\; U_{\mathbf{d}}\; X\; U_{-\mathbf{d}} \tag{6.134}$$

Consideriamo un autostato $|\, x, y, z\, \rangle$ di $\mathbf{R} \equiv (X, Y, Z)$:

$$X\;|\, x, y, z\, \rangle \;=\; x\;|\, x, y, z\, \rangle \tag{6.135}$$

Si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}
X'\;|\, x, y, z\, \rangle \;&=\; U_{\mathbf{d}}\; X\; U_{-\mathbf{d}}\;|\, x, y, z\, \rangle \\
&=\; U_{\mathbf{d}}\; X\;|\, x - d_x, y - d_y, z - d_z\, \rangle \\
&=\; (x - d_x)\; U_{\mathbf{d}}\;|\, x - d_x, y - d_y, z - d_z\, \rangle \\
&=\; (x - d_x)\;|\, x, y, z\, \rangle \\
&=\; (X - d_x)\;|\, x, y, z\, \rangle
\end{aligned}$$

Un risultato analogo vale per le altre coordinate e perció possiamo scrivere:

$$\mathbf{R}'\;|\, \mathbf{r}\, \rangle \;=\; (\mathbf{R} - \mathbf{d} \cdot I)\;\;|\, \mathbf{r}\, \rangle \tag{6.136}$$

dove si é tenuto conto che gli stati $|\, \mathbf{r}\, \rangle$ formano una base nello spazio di Hilbert del sistema.
Questo risultato non deve meravigliare perché una traslazione del sistema fisico é indistinguibile dalla traslazione inversa che sia eseguita solo sul sistema di riferimento lasciando invariato il sistema fisico. Per questo motivo il vettore $|\, \mathbf{r}\, \rangle$ é non solo un autostato di $\mathbf{R}$ con autovalore $\mathbf{r}$ ma anche un autostato di $\mathbf{R}'$ con autovalore $\mathbf{r} - \mathbf{d}$.
Tenendo conto della completezza dei vettori $|\, \mathbf{r}\, \rangle$ l'eq. 6.136 implica l'equaglianza tra gli operatori:

$$\mathbf{R}' \;=\; \mathbf{R} - \mathbf{d}\; I \tag{6.137}$$

6.4.2 Le relazioni di commutazione posizione-impulso

Nel caso in cui lo spostamento $\mathbf{d} \;=\; d\;\mathbf{u}$ sia infinitesimo possiamo sostituire nella 6.137 la 6.117:

$$\left(I \;-\; \frac{i}{\hbar}\, d\, \hat{\mathbf{u}} \;\cdot\; \mathbf{P} \right) \mathbf{R} \left(I \;+\; \frac{i}{\hbar}\, d\, \hat{\mathbf{u}} \;\cdot\; \mathbf{P} \right) \;=\; \mathbf{R} - \mathbf{d}\; I \tag{6.138}$$

Sviluppando il termine di sinistra e trascurando il termine proporzionale a d^2 che un infinitesimo di ordine superiore a d, otteniamo:

$$\mathbf{R} \; - \; \frac{i}{\hbar} \, d \; (\; P_u \, \mathbf{R} \; - \; \mathbf{R} \, P_u \;) \; = \; \mathbf{R} \; - \; d \; \hat{u} \; I \qquad (6.139)$$

dove abbiamo posto $P_u \equiv \hat{u} \cdot \mathbf{P}$. Poichè questa relazione vale per ogni spostamento infinitesimo, ne concludiamo:

$$\boxed{\mathbf{R} \, P_u \; - \; P_u \, \mathbf{R} \; = \; i \, \hbar \, \hat{u} \; I} \qquad (6.140)$$

Applichiamo la 6.140 al caso di uno spostamento nella direzione dell'asse x $\hat{u} = \hat{x}$ e proiettiamola lungo i tre assi coordinati:

$$[\; X \; , \; P_x \;] \; = \; i \, \hbar \qquad (6.141)$$
$$[\; Y \; , \; P_x \;] \; = \; 0 \qquad (6.142)$$
$$[\; Z \; , \; P_x \;] \; = \; 0 \qquad (6.143)$$

Operando allo stesso modo per $\hat{u} = \hat{y}$ e $\hat{u} = \hat{z}$ si ottengono in tutto nove relazioni di commutazione che riassumiamo brevemente nella forma seguente:

$$\boxed{[R_i \; , \; P_j] \; = \; i \, \hbar \, \delta_{i,j}} \qquad \text{per} \qquad (6.144)$$

dove $i, j = 1 \ldots 3$ ed abbiamo posto $R_1 \equiv X$, $R_2 \equiv Y$,$R_3 \equiv Z$ e così via.
Il significato delle relazioni di commutazione 6.144 è che un coordinata di posizione non commuta con la rispettiva componente dell'operatore $\mathbf{P}$ che genera traslazioni in quella direzione. Dal punto di vista fisico possiamo dire che non è possibile realizzare un dispositivo sperimentale capace di misurare con estrema precisione una coordinata di posizione e la rispettiva componente della variabile dinamica $\mathbf{P}$ che come si vedrà dovremo far corrispondere all'impulso della Meccanica Classica .

6.5 Gli autostati di impulso

Consideriamo un apparato sperimentale che produce una particella in un intorno infinitesimo del punto $\mathbf{r}$, cioè nello stato $| \; \mathbf{r} \; \rangle$. In seguito ad una traslazione di spostamento $\mathbf{a}$ dell'apparato sperimentale , la particella sarà prodotta nello stato $| \; \mathbf{r} + \mathbf{a} \; \rangle$:

$$| \; \mathbf{r} + \mathbf{a} \; \rangle \; = \; U_{\mathbf{a}} \; | \; \mathbf{r} \; \rangle \qquad (6.145)$$

Abbiamo già visto, nel caso di una particella libera di muoversi in tutto lo spazio, che i vettori $| \; \mathbf{r} \; \rangle$ formano una base continua dello spazio di Hilbert ma non sono normalizzabili. Vogliamo adesso studiare le proprietà degli autovalori e degli

autovettori dell'operatore impulso **P**.
Indichiamo con $\mid \mathbf{p} \rangle$ un autostato di **P** con autovalore **p**:

$$\mathbf{P} \mid \mathbf{p} \rangle \;=\; \mathbf{p} \mid \mathbf{p} \rangle \tag{6.146}$$

Studiamo le caratteristiche del seguente vettore:

$$\begin{aligned}
\mid Q \rangle \;&=\; \left(I \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \mathbf{q} \;\cdot\; \mathbf{R} \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.147)\\
&=\; \left(I \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; R_i \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.148)
\end{aligned}$$

dove **q** è un qualsiasi vettore infinitesimo di spazio.
Si ha :

$$\begin{aligned}
P_j \mid Q \rangle \;&=\; P_j \; \left(I \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; R_i \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.149)\\
&=\; \left(P_j \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; P_j\; R_i \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.150)\\
&=\; \left(P_j \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; (R_i\; P_j\; - [R_i, P_j]) \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.151)\\
&=\; \left(P_j \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; (R_i\; P_j\; - i\hbar\; \delta_{i,j}) \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.152)\\
&=\; \left(p_j \;+\; q_j \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; p_j\; R_i \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.153)\\
&==\; \left((p_j \;+\; q_j\;) \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; (\; p_j \;+\; q_j\;)\; R_i \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.154)\\
&=\; (p_j \;+\; q_j\;) \; \left(I \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \sum_i q_i\; R_i \right) \mid \mathbf{p} \rangle & (6.155)\\
&=\; (p_j \;+\; q_j\;) \mid Q \rangle & (6.156)
\end{aligned}$$

Pertanto fintanto che q è un vettore infinitesimo $\mid Q \rangle$ è autovettore di P con autovalore $\mathbf{p} \;+\; \mathbf{q}$:

$$\mid \; \mathbf{p} \;+\; \mathbf{q} \;\; \rangle \;=\; \left(I \;+\; \frac{i}{\hbar}\, \mathbf{q} \;\cdot\; \mathbf{R} \right) \mid \mathbf{p} \rangle \tag{6.157}$$

Per un vettore qualsiasi $\mathbf{q}$ finito il solito argomento mostra che:

$$| \, \mathbf{q} + \mathbf{p} \, \rangle \; \equiv \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} \, | \, \mathbf{p} \, \rangle \tag{6.158}$$

è autovettore di $\mathbf{P}$ con autovalore $\mathbf{p} + \mathbf{q}$:

$$\mathbf{P} \, | \, \mathbf{q} + \mathbf{p} \, \rangle \; = \; (\, \mathbf{p} \; + \; \mathbf{q}) \; | \, \mathbf{q} + \mathbf{p} \, \rangle \tag{6.159}$$

Ciò mostra che l'insieme degli autovalori di P è continuo: l'impulso di una particella libera può avere un qualsiasi valore reale.
Inoltre, ponendo nella 6.158 $\mathbf{p} \; = \; 0$, si ottiene:

$$| \, \mathbf{q} \, \rangle \; = \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} \, | \, \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \, \rangle \tag{6.160}$$

Studiamo la forma dell'ampiezza $\langle \; \mathbf{r} \; | \; \mathbf{p} \; \rangle$
Si ha

$$\begin{aligned}
\langle \; \mathbf{r} \; | \; \mathbf{p} \; \rangle \; &= \; \langle \, \mathbf{r} = \mathbf{0} \, | \, U^{\dagger}_{\mathbf{r}} \, | \, \mathbf{p} \, \rangle \; = \; \langle \, \mathbf{r} = \mathbf{0} \, | \, e^{\frac{i}{\hbar} \; \mathbf{r}\cdot\mathbf{P}} \, | \, \mathbf{p} \, \rangle && (6.161)\\
&= \; e^{\frac{i}{\hbar} \; \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}} \, \langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \; \mathbf{p} \; \rangle && (6.162)\\
&= \; e^{\frac{i}{\hbar} \; \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}} \, \langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} \, | \; \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \; \rangle && (6.163)\\
&= \; \langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \; \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \; \rangle \, e^{\frac{i}{\hbar} \; \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}} && (6.164)
\end{aligned}$$

Bisogna adesso valutare la costante $\langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \; \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \; \rangle$.
Osserviamo, per questo scopo, che per due impulsi arbitrari si ha:

$$\begin{aligned}
\langle \; \mathbf{p}' \; | \; \mathbf{p}'' \; \rangle \; &= \; \int d^3r \, \langle \; \mathbf{p}' \; | \; \mathbf{r} \; \rangle \, \langle \; \mathbf{r} \; | \; \mathbf{p}'' \; \rangle && (6.165)\\
&= \; | \, \langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \; \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \; \rangle |^2 \int \; d^3r \; e^{\frac{i}{\hbar}(\; \mathbf{p}''-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} && (6.166)\\
&= \; | \, \langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \; \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \; \rangle |^2 \; (\; 2\pi\hbar \;)^3 \; \; \delta^3 \, (\; \mathbf{p}'' - \mathbf{p}') && (6.167)
\end{aligned}$$

A questo punto decidiamo di scegliere:

$$\langle \; \mathbf{r} = \mathbf{0} \; | \; \mathbf{p} \; = \; \mathbf{0} \; \rangle \; = \; \frac{1}{(\; 2\pi\hbar \;)^{3/2}} \tag{6.168}$$

In questo modo abbiamo normalizzato gli autostati di impulso alla δ di Dirac:

$$\langle \; \mathbf{p}' \; | \; \mathbf{p}'' \; \rangle \; = \; \delta^3 \, (\; \mathbf{p}'' - \mathbf{p}') \tag{6.169}$$

ed inoltre abbiamo trovato:

$$\langle \; \mathbf{r} \; | \; \mathbf{p} \; \rangle \; = \; \frac{1}{(\; 2\pi\hbar \;)^{3/2}} \; e^{\frac{i}{\hbar} \; \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}} \tag{6.170}$$

6.5.1 Completezza degli autostati di impulso

Mostriamo qui che gli autostati di impulso $\mid p \rangle$ formano una base dello spazio degli stati.
Infatti, per due qualsiasi autostati di posizione $\mid \mathbf{r} \rangle$ e $\mid \mathbf{r}' \rangle$ si ha:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} \mid \mathbf{r}' \rangle &= \delta^3 (\mathbf{r} - \mathbf{r}') && (6.171)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \; e^{\,i\, \mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} && (6.172)\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \; e^{\,\frac{i}{\hbar}\, \mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} && (6.173)\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \; e^{\,-\,\frac{i}{\hbar}\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'}\, e^{\,\frac{i}{\hbar}\, \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} && (6.174)\\
&= \int d^3p \, \langle \mathbf{r} \mid \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} \mid \mathbf{r}' \rangle && (6.175)
\end{aligned}$$

Poichè gli autostati di posizione formano una base dello spazio di Hilbert, la precedente relazione implica:

$$\int d^3p \mid \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} \mid \; = \; I \qquad (6.176)$$

cioè anche gli autostati di impulso formano una base dello spazio di Hilbert e pertanto le componenti dell'impulso sono un insieme completo di osservabili compatibili. In altri termini possiamo determinare tutte le proprietà del sistema-particella mediante misure di impulso. In tal caso le quantità importanti sono le ampiezze:

$$\langle \mathbf{p} \mid \psi \rangle \; \equiv \; \psi\,(\mathbf{p}) \qquad (6.177)$$

che che chiameremo funzioni d'onde nella rappresentazione degli impulsi.Queste si possono interpretare dicendo che:

$$\delta\mathcal{P}_\psi(\mathbf{p}) \; \equiv \; |\langle \mathbf{p} \mid \psi \rangle|^2 \, d^3p \qquad (6.178)$$

rappresenta la probabilità di misurare un impulso compreso nell'intorno infinitesimo d^3p centrato nel valore $\mathbf{p}$ in un sistema-particella preparato nello stato $\mid \psi \rangle$. Questa interpretazione è coerente con l'usuale definizione di valore medio di una variabile dinamica. Infatti possiamo scrivere:

$$\langle\, \psi \mid \mathbf{P} \mid \psi \,\rangle \;=\; \int d^3p \,\langle\, \psi \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{p} \,\rangle \,\langle\, \mathbf{p} \mid \mid \psi \,\rangle \tag{6.179}$$

$$= \int d^3p \;\mathbf{p}\, \langle\, \psi \mid \mathbf{p} \,\rangle \langle\, \mathbf{p} \mid \psi \,\rangle \tag{6.180}$$

$$= \int \delta\mathcal{P}_\psi(\mathbf{p})\; \mathbf{p} \;\equiv\; \langle\, \mathbf{P} \,\rangle_\psi \tag{6.181}$$

6.5.2 Cambiamento di rappresentazione

Si passa facilmente da una base all'altra. Per esempio se conosciamo la funzione d'onde nella rappresentazione delle coordinate basta osservare quanto segue:

$$\widetilde{\psi}\,(\mathbf{p}) \;=\; \langle\, \mathbf{p} \mid \psi \,\rangle \tag{6.182}$$

$$= \int d^3r \,\langle\, \mathbf{p} \mid \mathbf{r} \,\rangle \,\langle\, \mathbf{r} \mid \psi \,\rangle \tag{6.183}$$

$$= \frac{1}{(\,2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r \;\; e^{\,-\,\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\; \psi\,(\mathbf{r}) \tag{6.184}$$

Viceversa, nota la funzione d'onde nella rappresentazione degli impulsi si ricava facilmente la funzione d'onde nello spazio delle coordinate:

$$\psi\,(\mathbf{r}) \;=\; \langle\, \mathbf{r} \mid \psi \,\rangle \tag{6.185}$$

$$= \int d^3p \,\langle\, \mathbf{r} \mid \mathbf{p} \,\rangle \,\langle\, \mathbf{p} \mid \psi \,\rangle \tag{6.186}$$

$$= \frac{1}{(\,2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \;\; e^{\,\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\; \widetilde{\psi}\,(\mathbf{p}) \tag{6.187}$$

In altri termini le funzioni d'onde $\psi(\,\mathbf{r}\,)$ e $\psi(\,\mathbf{p}\,)$ sono le trasformate di Fourier l'una dell'altra.

6.5.3 L'impulso nella rappresentazione delle coordinate

Una traslazione di spostamento a trasforma una particella creata in una posizione $\mathbf{r}$ in una particella posta nella posizione $\mathbf{r} + a$. Quindi:

$$\mid \mathbf{r} \,+\, \mathbf{a} \,\rangle \;=\; U_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{r} \,\rangle \tag{6.188}$$

Per una traslazione di spostamento infinitesimo $\delta\mathbf{r}$ si ottiene:

$$\mid \mathbf{r} \,+\, \delta\mathbf{r} \,\rangle \;=\; \left(\, I \;-\frac{i}{\hbar}\,\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}\right) \,\mid \mathbf{r} \,\rangle \tag{6.189}$$

Consideriamo l'equazione coniugata di quest'ultima:

$$\langle\, \mathbf{r} \,+\, \delta\mathbf{r} \,| \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,| \left(I \,+ \frac{i}{\hbar}\, \delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{P} \right) \tag{6.190}$$

Per una traslazione lungo l'asse $\hat{x}$: $\delta\mathbf{r} \;=\; (\, \delta x,\; 0,\; 0\,)$ la precedente relazione diviene:

$$\langle\, \mathbf{r} \,+\, \delta\mathbf{r} \,| \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,| \left(I \,+ \frac{i}{\hbar}\, \delta x \; P_x \right) \tag{6.191}$$

dalla quale si ricava la relazione formale:

$$\frac{\hbar}{i}\, \frac{\langle\, \mathbf{r} \,+\, \delta\mathbf{r} \,| \,-\, \langle\, \mathbf{r} \,|}{\delta x} \;=\; \langle\, \mathbf{r} \;\;| \, P_x \tag{6.192}$$

Nel termine di sinistra riconosciamo la deivata parziale rispetto alla variabile x dei vettori dello spazio di Hilbert. Possiamo perciò scrivere in modo formale:

$$\frac{\hbar}{i}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \langle\, \mathbf{r} \,| \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,|\, P_x \tag{6.193}$$

Il significato concreto di questa relazione si chiarisce quando la applichiamo a destra ad uno stato arbitrario $|\, \psi\,\rangle$:

$$\frac{\hbar}{i}\, \frac{\partial}{\partial x}\, \langle\, \mathbf{r} \,|\, \psi \,\rangle \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,|\, P_x \,|\, \psi \,\rangle \tag{6.194}$$

ovvero

$$\frac{\hbar}{i}\, \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x} \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,|\, P_x \,|\, \psi \,\rangle \tag{6.195}$$

Una risultato analogo vale per ogni altra direzione, sicchè possiamo dire che nella rappresentazione delle coordinate l'impulso P assume la forma dell'operatore differenziale gradiente:

$$\nabla \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{6.196}$$

Precisamente:

$$\frac{\hbar}{i}\, \nabla\, \langle\, \mathbf{r} \,| \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,|\, \mathbf{P} \tag{6.197}$$

Come prima, il significato concreto di questa relazione simbolica si chiarisce quando viene applicata ad uno stato arbitrario:

$$\frac{\hbar}{i}\, \nabla\, \langle\, \mathbf{r} \,|\, \psi \,\rangle \;=\; \frac{\hbar}{i}\, \nabla\, \psi(\, \mathbf{r}\,) \;=\; \langle\, \mathbf{r} \,|\, \mathbf{P} \,|\, \psi \,\rangle \tag{6.198}$$

6.5.4 Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg

Il fatto che le osservabili X e P_x non commutano implica l'impossibilitá di realizzare un apparato sperimentale capace di misurare contemporaneamente e con precisione infinita sia la coordinata x sia la componente p_x dell'impulso di una particella. Questa affermazione, nota come *Principio di Indeterminazione di Heisenberg* puó essere dimostrata applicando il risultato rif agli operatori X e P_x che , come si sa, soddisfano alle relazioni di commutazione:

$$[X, P_x] \; = \; i\hbar \tag{6.199}$$

Otteniamo cosí

$$(\delta X)_\psi \cdot (\delta P_x)_\psi \; \geq \; \frac{1}{2}\,\hbar \tag{6.200}$$

Risultati analoghi valgono per le componenti degli operatori posizione ed impulso lungo gli altri assi coordinati. Aggiungiamo perció alla precedente le altra due equazioni simili:

$$(\delta Y)_\psi \cdot (\delta P_y)_\psi \; \geq \; \frac{1}{2}\,\hbar \tag{6.201}$$

$$(\delta Z)_\psi \cdot (\delta P_z)_\psi \; \geq \; \frac{1}{2}\,\hbar \tag{6.202}$$

6.5.5 Osservabili invarianti per traslazioni

È interessante vedere come cambia l'operatore impulso $\mathbf{P}$ in una traslazione. Per applicazione della 6.132 all'operatore $\mathbf{P}$ si ha:

$$\mathbf{P}' \; = \; U_{\mathbf{d}}\;\mathbf{P}\;U_{\mathbf{d}}^\dagger \tag{6.203}$$

$$= \; U_{\mathbf{d}}\;U_{\mathbf{d}}^\dagger\;\mathbf{P} \tag{6.204}$$

$$= \; \mathbf{P} \tag{6.205}$$

come deve essere,dato che una traslazione rigida del sistema di riferimento non puó modificare l'impulso del sistema fisico. In altri termini *l'impulso è invariante per traslazioni.*

In generale diremo che una variabile dinamica $\mathcal{A}$ è invariante per traslazioni quando l'operatore lineare $\hat{A}$ che la rappresenta non viene modificato da alcuna traslazione.

Cerchiamo adesso quali sono le condizioni generali che garantiscono l'invarianza di una osservabile fisica A rispetto alle traslazioni di spazio.

Osserviamo a questo proposito che affinché si abbia

$$A' \; = \; A \tag{6.206}$$

deve risultare, qualunque sia lo spostamento $\mathbf{d}$:

$$U_{\mathbf{d}}\;A\;U_{\mathbf{d}}^\dagger \; = \; A \tag{6.207}$$

e quindi, moltiplicando a destra per $U_{\mathbf{d}}$:

$$U_{\mathbf{d}} \; A \; U_{\mathbf{d}}^{\dagger} \; U_{\mathbf{d}} \; = \; A \; U_{\mathbf{d}} \tag{6.208}$$

e a causa dell'unitarietá di U si ha infine:

$$U_{\mathbf{d}} \; A \; = \; A \; U_{\mathbf{d}} \tag{6.209}$$

L'operatore A deve cosí commutare con qualsiasi operatore di traslazione spaziale. In particolare per una traslazione infinitesima δx lungo l'asse $\hat{x}$ di ha:

$$U(\delta x) \; A \; = \; A \; U(\delta x) \tag{6.210}$$

quindi

$$(I \; - \; \frac{i}{\hbar}\delta x P_x) \; A \; = \; A \; (I \; - \; \frac{i}{\hbar}\delta x) \tag{6.211}$$

da cui infine:

$$A \; P_x \; = \; P_x \; A \tag{6.212}$$

ovvero

$$[A \; , \; P_x] \; = \; 0 \tag{6.213}$$

Allo stesso modo l'invarianza di A rispetto alle traslazioni infinitesime lungo gli altri assi coordinati porta alla conclusione:

$$[A \; , \; P_y] \; = \; 0 \tag{6.214}$$

$$[A \; , \; P_z] \; = \; 0 \tag{6.215}$$

Riassumendo questi risultati possiamo dire che:
Condizione necessaria affinché una osservabile fisica A sia invariante per traslazioni di spazio é che essa commuti con tutte le componenti dell'operatore impulso:

$$[\mathbf{P}, A] \; = \; 0 \tag{6.216}$$

Allo stesso modo si prova che:
Condizione necessaria affinché una osservabile fisica A sia invariante per le traslazioni di spazio lungo una certa direzione di versore $\hat{n}$ é che essa commuti con la componente P_n dell'operatore impulso lungo la direzione $\hat{n}$:

$$[P_n, A] \; = \; 0 \qquad \text{dove} \qquad P_n \; = \; \mathbf{P} \cdot \hat{n} \tag{6.217}$$