

Scattering da potenziale centrale di una particella carica

De Domenico Manlio
Università degli Studi di Catania

Sommario

Presento i risultati dello studio del moto di una particella carica soggetta all'azione di un campo centrale coulombiano puro (o di Rutherford) nel vuoto. La particella in moto genera un campo induzione magnetica che influenza il suo moto, rendendola soggetta ad un potenziale magnetico.

Sia data una particella Υ_0 di carica q_0 e massa m_0 fissa in un punto dello spazio inerziale Σ_3 vuoto. Assumiamo come origine di un sistema di coordinate cartesiane il punto P_0 in cui si trova la suddetta particella.

Sia data adesso un'altra particella Υ di carica q e massa m , in un punto $P \in \Sigma_3$ con velocità iniziale v_0 . Sia Π il piano individuato dalla traiettoria di Υ e da Υ_0 .

In tali condizioni possiamo eseguire un cambiamento in coordinate polari:

$$x \longrightarrow r \cos(\phi); \quad y \longrightarrow r \sin(\phi) \quad (1)$$

1 Dinamica del sistema

Il sistema in esame è isolato, per cui le uniche forze in gioco sono quelle di campo tra le due particelle. Nella trattazione potremo fare a meno di considerare le forze di attrazione gravitazionale in quanto non comparabili con quelle di attrazione elettrica.

La particella Υ in moto con una certa velocità v genera intorno a se un campo induzione magnetica \vec{B} che agisce sulla particella stessa. Tale campo si ricava facilmente essere

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 (\vec{v} \wedge \vec{E}_0) \quad (2)$$

avendo indicato con \vec{E}_0 il campo elettrico generato da Υ nel vuoto.

Sia \vec{s} la traiettoria di Υ ; si ha che $\vec{v} = \dot{\vec{s}}$.

Eseguito il cambiamento di variabili e risolvendo algebricamente, si ottiene:

$$\dot{s}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (3)$$

I versori nel nuovo sistema di riferimento O, r, ϕ sono rispettivamente \vec{e}_r, \vec{e}_ϕ , per cui si ha che

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi \\ \vec{E}_0 &= \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \end{aligned} \quad (4)$$

Di conseguenza, la (2) diventa

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 [(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi) \wedge \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r]$$

che sfruttando le proprietà di antisimmetria e additività del prodotto vettoriale, si riduce a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\phi}}{r} q (\vec{e}_\phi \wedge \vec{e}_r) \quad (5)$$

che è un vettore ortogonale al piano della traiettoria di Υ e ha l'effetto di curvarla¹.

A tale campo \vec{B} è associata una certa energia potenziale, immagazzinata nello spazio dove esso è diverso da zero, ovvero intorno alla particella Υ . Assumiamo come ρ^* il raggio della sfera intorno alla particella. Il problema che sorge è il seguente: quanto vale il campo magnetico dentro la particella? Ha senso parlare di tale campo di induzione in un contesto classico del genere? Su questo argomento torneremo successivamente; intanto assumiamo che, detto r_Υ il raggio di Υ , valga la condizione $\rho^* \gg r_\Upsilon$, di modo che nel calcolo del volume della sfera, sia che il campo magnetico interno alla particella esista o meno, si abbia $\rho^* + r_\Upsilon \cong \rho^*$ e $\rho^* - r_\Upsilon \cong \rho^*$, dovendo poi valutare la grandezza del suddetto ρ^* .

In questo modo l'energia immagazzinata nel campo magnetico, detto V il volume $\frac{4}{3}\pi\rho^*$, risulta essere:

$$A = \frac{1}{2}V \int BdH = \frac{1}{2}V \frac{B^2}{\mu_0} = k_A \frac{\dot{\phi}^2}{r^2} \quad (k_A = \frac{1}{24\pi}\mu_0 q^2 \rho^{*3}) \quad (6)$$

Molto più semplicemente il potenziale elettrico dovuto alla forza coulombiana tra le due particelle è:

$$V = k_V \frac{1}{r} \quad (k_V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq_0) \quad (7)$$

2 Studio del moto del sistema

La lagrangiana del moto del sistema è

$$L(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - [k_A \frac{\dot{\phi}^2}{r^2} + k_V \frac{1}{r}] \quad (8)$$

Poichè la lagrangiana non dipende da ϕ , dalle equazioni di Eulero-Lagrange, si conserva nel tempo il momento angolare l_0 :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = l_0 = mr^2\dot{\phi} - 2k_A \frac{\dot{\phi}}{r^2} \quad (9)$$

Inoltre la L non è funzione esplicita del tempo, per cui si conserva l'energia del sistema durante il moto:

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \Pi_{eff}(r, \dot{\phi}) \quad (\Pi_{eff} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + [k_A \frac{\dot{\phi}^2}{r^2} + k_V \frac{1}{r}]) \quad (10)$$

Essendo ora i momenti cinetici

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = l_0 \end{aligned} \quad (11)$$

¹E' interessante notare che in assenza del campo coulombiano, la particella, lanciata in moto rettilineo uniformemente vario, subisce una leggera deviazione dalla linea retta della sua traiettoria e che il raggio di curvatura di tale deviazione sia $\rho = \frac{4\pi m}{\mu_0 q^2} \frac{r\dot{r}}{\dot{\phi}}$.

si ha l'hamiltoniana

$$H(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + [k_A \frac{\dot{\phi}^2}{r^2} + k_V \frac{1}{r}] \quad (12)$$

Tuttavia si può esprimere l'hamiltoniana in una forma sicuramente più semplice:

$$H(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + l_0\dot{\phi} - \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \left\{ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + [k_A \frac{\dot{\phi}^2}{r^2} + k_V \frac{1}{r}] \right\}$$

Infatti semplificando e svolgendo le operazioni dove possibile e riconoscendo nella quantità tra le parentesi graffe la (10), si ottiene la seguente espressione:

$$H(r, \dot{\phi}) = E_0 + l_0\dot{\phi} - mr^2\dot{\phi}^2 \quad (13)$$

Tuttavia poichè la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, vale anche la relazione $H = E_0$, dunque la condizione

$$l_0\dot{\phi} - mr^2\dot{\phi}^2 = 0 \quad (14)$$

deve essere sempre verificata. Andando ad esplicitare $\dot{\phi}$ dalla (9) e sostituendo nella (14), risolvendo si ottiene la condizione necessaria che $k_A = 0$, ovvero $\rho^* = 0$, che comporta che il raggio di curvatura dovuto al campo autoindotto eventuale, è nullo, cioè la particella carica non risente del campo, almeno nei limiti classici.

E' fondamentale notare che a questo risultato siamo giunti senza utilizzare ρ^* , ma al contrario abbiamo dedotto che esso sia nullo a partire dalla condizione necessaria $k_A = 0$: dunque quanto trovato non dipende dalla nostra scelta di ρ^* e non possiamo sapere di conseguenza se e cosa significhi parlare di un campo magnetico interno alla particella.