Andamento caotico oltre il limite di approssimabilità di una macchina

De Domenico Manlio

Università degli Studi di Catania

Sommario

Presento i risultati dello studio dell'andamento reale di una particolare successione discreta di numeri reali, quali le approssimazioni per la computazione di derivate prime, secondo la formula per 5 punti.

Molti problemi di derivazione e integrazione possono essere presto risolti ricorrendo a metodi diretti o iterativi di approssimazione.

I risultati che seguono sono stati sviluppati a partire dallo studio delle formule per 5 punti per la derivazione.

Definiamo come ***curva di approssimazione*** l'insieme discreto dei punti del piano che hanno per ascissa e ordinata, rispettivamente, il passo h e il valore effettivo dell'approssimazione.

Lo scopo di questo studio è quello di evidenziare l'andamento imprevedibile delle diverse curve di approssimazione oltre il limite di approssimabilità della macchina che la computa.

1 Computazione della derivata della derivata prima

Vogliamo calcolare la derivata di una funzione $f(x)$ nel punto $x = 0$ (per ogni altro generico punto basta eseguire una semplice traslazione).

Pertanto preso $h > 0$, suddividiamo l'asse delle x in intervalli scegliendo i punti: $x_{-2} = -2h$, $x_{-1} = -h$, $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$.

Sviluppando in serie di Taylor la $f(x)$ nei 4 punti su indicati si ha:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \frac{1}{3!}x^3 f'''(0) + o(x^4) \tag{1}$$

$$f(\pm h) = f_{\pm 1} = f(0) \pm hf'(0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(0) \pm \frac{1}{3!}h^3 f'''(0) + o(h^4)$$

$$f(\pm 2h) = f_{\pm 2} = f(0) \pm 2hf'(0) + 2h^2 f''(0) \pm \frac{8}{3}h^3 f'''(0) + o(h^4)$$

1.1 Formule a 2 punti

Arrestando lo sviluppo di $f_{\pm 1}$ a f', con ordine di errore $o(h^2)$, si ottengono immediatamente le seguenti formule:

$$f' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + o(h) \tag{2}$$

$$f' = \frac{f_1 - f_0}{h} + o(h) \tag{3}$$

rispettivamente dette *da sinistra* e *da destra*, entrambe valide per approssimare f'.

1.2 Formule a 3 punti

Arrestando questa volta a f'' lo sviluppo, con $o(h^3)$, e dopo aver sottratto f_{-1} da f_1, si ha:

$$f' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + o(h^2) \tag{4}$$

ovvero l'aggiunta di un ulteriore punto ci ha fatto guardagnare un ordine di convergenza.

1.3 Formule a 4 punti

Analogamente a prima, ma arrestandoci allo sviluppo in f''', con $o(h^4)$, dopo aver lavorato con le equazioni, si ha:

$$f' = \frac{-2f_{-1} - 3f_0 + 6f_1 - f_2}{6h} + o(h^3) \tag{5}$$
$$f' = \frac{f_{-2} + 3f_0 - 6f_{-1} - 2f_1}{6h} + o(h^3) \tag{6}$$

ovvero un'approssimazione ancora migliore.

1.4 Formule a 5 punti

Per concludere con l'approssimazione della derivata prima, e procedendo in maniera analoga alle precedenti, ma con un ordine di approssimazione in più, si ottiene la formula a 5 punti, la più utilizzata:

$$f' = \frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2}{12h} + o(h^4) \tag{7}$$

1.5 Listato 'der_prima.f' e considerazioni finali

Generalmente si potrebbe pensare di ottenere un'arbitraria approssimazione via via scegliendo ordini maggiori nello sviluppo in serie di Taylor, ma questo non si rivela in realtà corretto.

Il calcolatore, in quanto macchina, lavora con bit che rappresentano tipi di dati che sono approssimati per la loro natura, dunque la misura di f' risulta già approssimata sia matematicamente che dal calcolatore con conseguenze anche inaspettate.

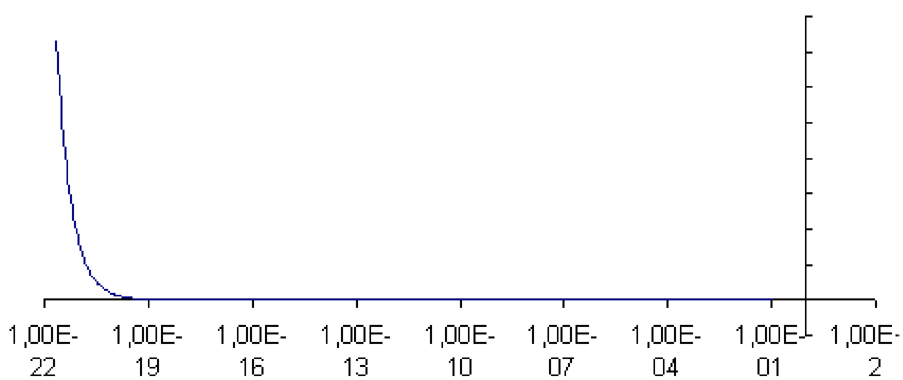
Per renderci meglio conto ecco il listato in Fortran del programma che eseguirà quanto detto finora:

```
      PROGRAM DERIV_PRIMA
        !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
        ! CALCOLO DELLA DERIVATA PRIMA CON 5 METODI !
        ! LA FUNZIONE E' F(X) = TAN(X) IN X = 4     !
        !                                           !
        ! QUESTO CODICE E' STATO REALIZZATO DA MAN- !
```

```
! LIO DE DOMENICO PRESSO L'UNIVERSITA' DE - !
! GLI STUDI DI CATANIA, SOTTO LA GNU PUBLIC !
! LICENSE.                                  !
!                                           !
! LAST UPDATE: 25/06/2004                   !
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

IMPLICIT NONE

REAL(KIND=2) :: EXACT_VAL,H,X,COUNTER
REAL(KIND=2) :: D5P

X = 4
H = 0.1
EXACT_VAL = 1 + (TAN(X))**2

DO COUNTER=1,500
  WRITE (*,*) H,";",EXACT_VAL-D5P
  H=H/1.1
END DO

END PROGRAM DERIV_PRIMA
```

La successione di 500 punti ottenuta per la formula a 5 punti, è riassunta in **fig.1**.

Fig.1: h1/h500



L'andamento è generalmente regolare, ma una volta superata la tolleranza intrinseca della macchina, comincia un andamento non previsto, riassunto in maniera migliore in **fig.2**, **fig.3**, **fig.4**, **fig.5**.

Fig.2: h1/h100

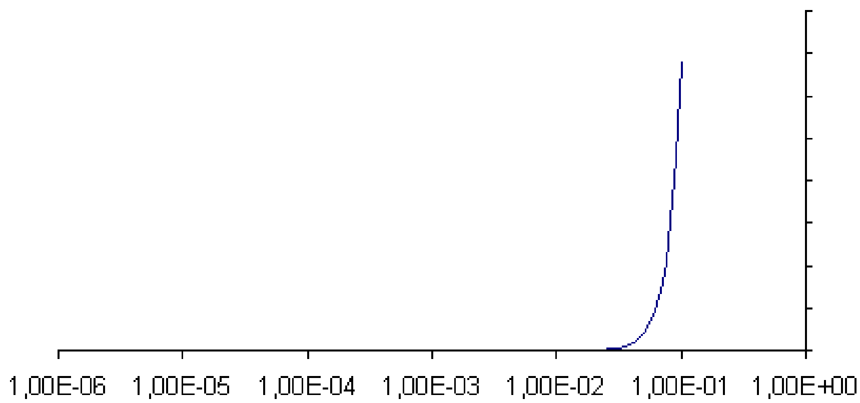


Fig.3: h101/h300

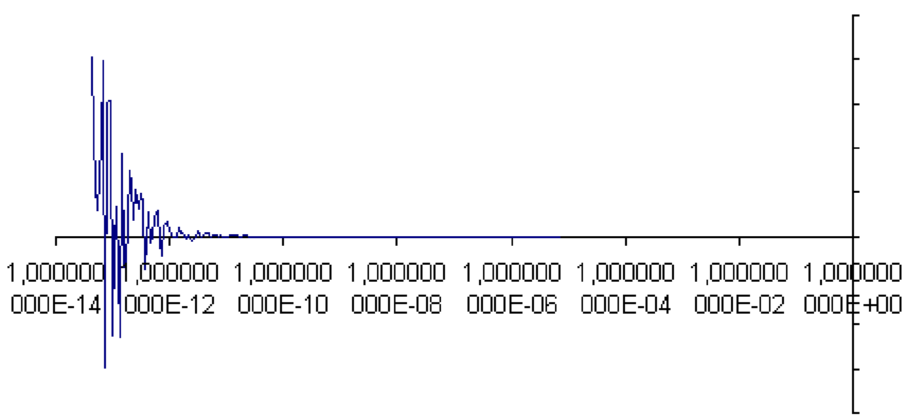


Fig.4: h301/h400

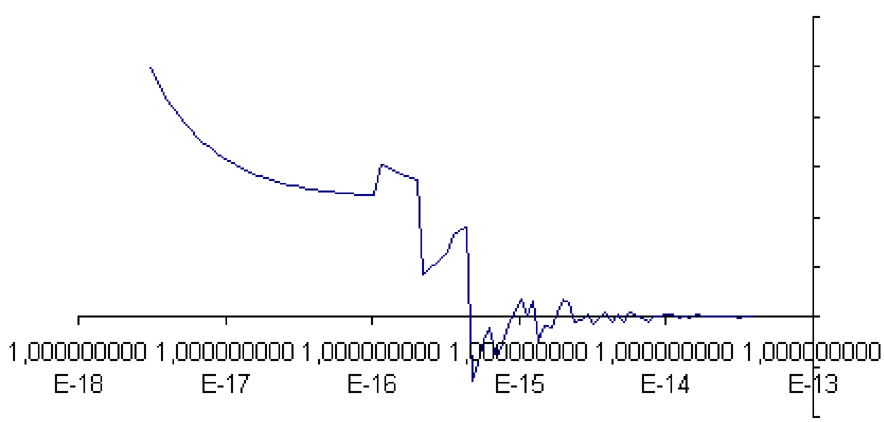
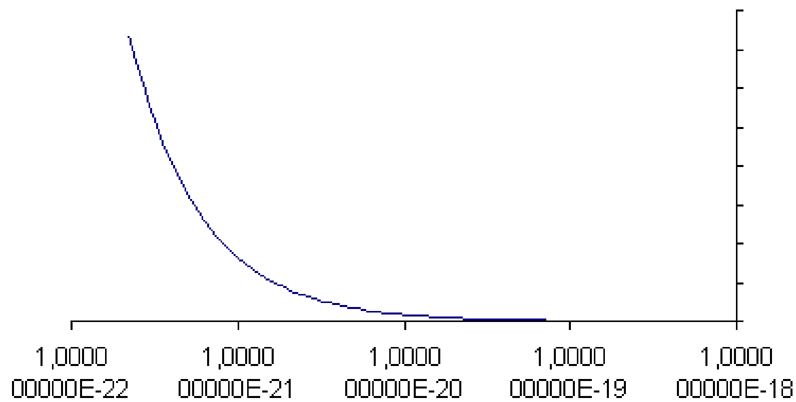


Fig.5: h401/h500



Quelli che seguono sono i risultati graficati dell'andamento della curva di approssimazione per valori di h, rispettivamente, 0.95, 1.05 e 1.15:

Fig.6: h1/h500

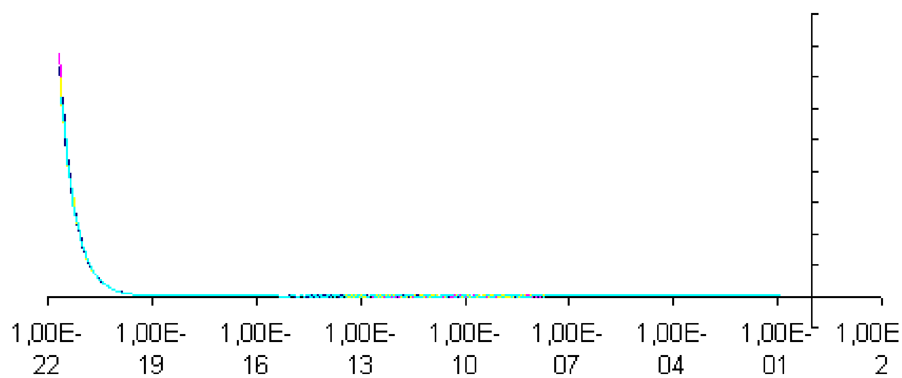


Fig.7: h1/h100

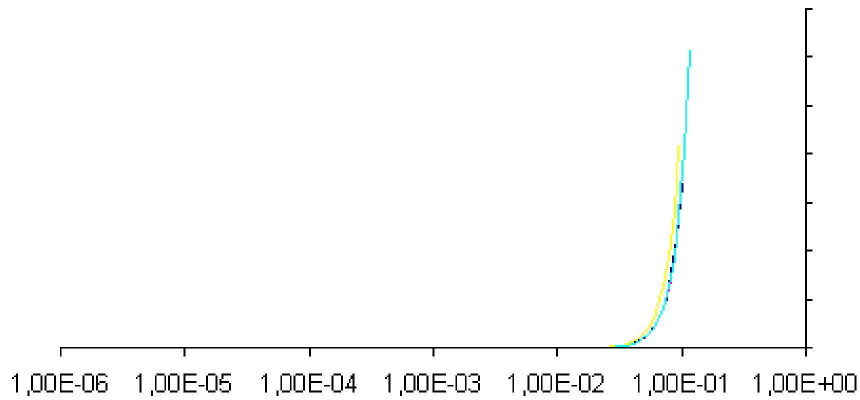


Fig.8: h101/h300

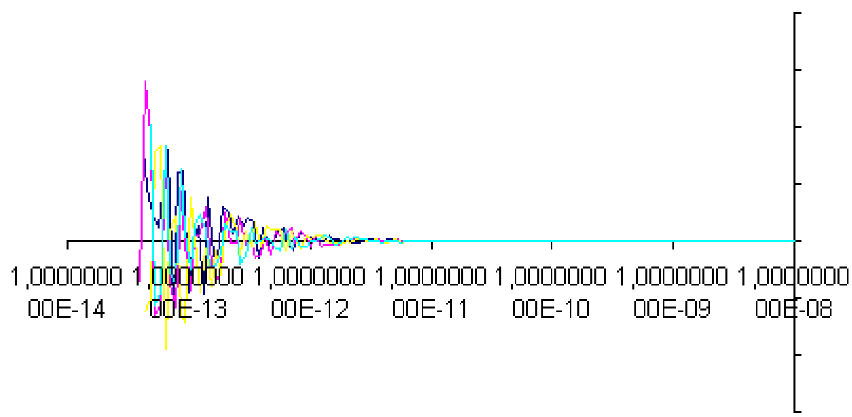


Fig.9: h301/h400

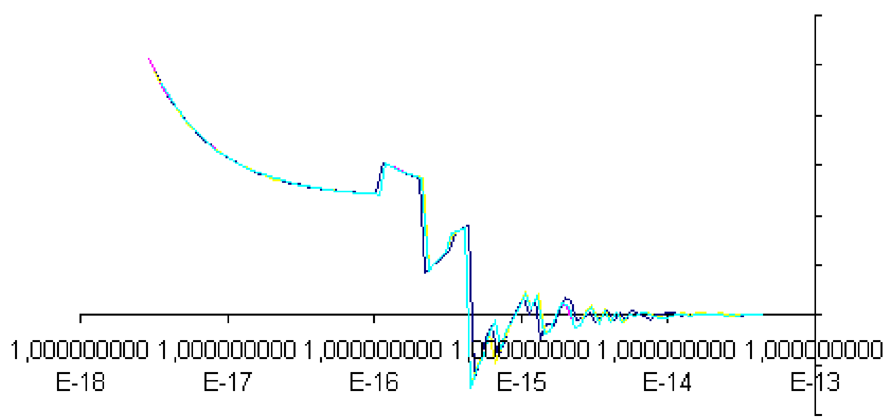


Fig.10: h401/h500

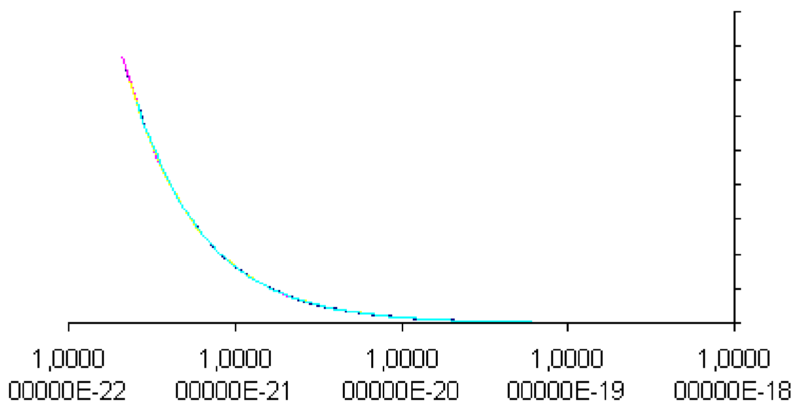


Fig.11: h101/h300