Meccanica classica differenziale

Manlio De Domenico

24 Dicembre 2002

In questo breve articolo, cercheremo di trattare dal punto di vista delle equazioni differenziali alcune classi di problemi di meccanica classica.
A tale scopo, prima di procedere, ricordiamo brevemente i teoremi che ci occorreranno per risolvere le equazioni differenziali.

0.1 Teoremi fondamentali

Definizione 1 *Si definisce un'*equazione differenziale lineare del primo ordine*, se $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni note definite in un intervallo I, un'equazione differenziale del tipo*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Teorema 1 *Un'equazione differenziale lineare $y' + p(x)y = q(x)$, se $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni note definite in un intervallo I, e $f(x_0) = y_0$ con $x_0 \in I, y_0 \in R$, ha una e una sola soluzione della forma*

$$y = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-A(t)} dt$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} p(t) dt$$

Definizione 2 *Si definisce un'*equazione differenziale lineare del secondo ordine*, se $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ sono funzioni note definite in un intervallo I, un'equazione differenziale del tipo*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Teorema 2 *Ogni soluzione dell'equazione differenziale $y'' + qy = 0$ è della forma $y = au_1(x) + bu_2(x)$ se e solo se dato un numero reale $q \in I$ valgano le condizioni:*

- *per $q = 0$ sia $u_1(x) = 1, u_2(x) = x$;*

- *per* $q < 0$ *sia* $q = -k^2$ *e* $u_1(x) = e^{kx}, u_2(x) = e^{-kx}$*;*
- *per* $b > 0$ *sia* $b = k^2$ *e* $u_1(x) = \cos(kx), u_2(x) = \sin(kx)$*.*

con $a, b \in R$*.*

Teorema 3 *Data un'equazione differenziale omogenea del secondo ordine* $y'' + py' + qy = 0$*, ogni sua soluzione è della forma*

$$y = e^{-px/2}[au_1(x) + bu_2(x)]$$

con $a, b \in R$ *e*

- *per* $d = 0$*,* $u_1(x) = 1, u_2(x) = x$*;*
- *per* $d < 0$ *e* $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$*,* $u_1(x) = \cos(kx), u_2(x) = \sin(kx)$*;*
- *per* $d > 0$ *e* $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$*,* $u_1(x) = e^{kx}, u_2(x) = e^{-kx}$*.*

Definizione 3 *Si definisce* wronskiano *di due funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$*, la funzione*

$$W(x) = det(\begin{matrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{matrix})$$

ovvero la funzione $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$*.*
Il wronskiano *è generalizzabile al caso di n funzioni.*

Definizione 4 *Data una funzione* f *di derivate* f' *e* f''*, si definisce* $L(f) = f + pf' + qf''$*.*

Teorema 4 *Sia data l'equazione differenziale* $y'' + py' + qy = r$*. Se* y_1 *è una soluzione particolare di* $L(y) = r$ *allora la soluzione generale si ottiene sommando ad essa la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea* $L(y) = 0$*.*

Teorema 5 *Sia data* $L(y)$ *e siano* $u_1(x)$ *e* $u_2(x)$ *le soluzioni di* $L(y) = 0$*. Se* W *è il wronskiano delle due funzioni, l'equazione non omogenea* $L(y) = r$ *ammette come soluzione particolare*

$$y_1(x) = t_1(x)u_1(x) + t_2(x)u_2(x)$$

dove

$$t_1(x) = -\int u_2(x)\frac{r(x)}{W(x)} \qquad t_2(x) = \int u_1(x)\frac{r(x)}{W(x)}$$

0.2 Sistemi riconducibili a equazioni differenziali del secondo ordine

Si consideri una molla il cui asse è verticale. Sulla molla, di coefficiente k, viene posto un oggetto di massa m, che la comprime di un breve tratto.
Sotto una forza esterna agente sull'oggetto, la molla viene ulteriormente compressa. Si assuma la molla nel punto di contatto in questa nuova posizione come origine di un sistema di riferimento di assi ortogonali e si trascuri la natura della forza esterna.
La forza smette di agire, dunque l'oggetto schizza in aria fino ad arrivare ad un'altezza massima h per poi tornare sulla molla e ripetere l'evento. Non trascurare l'attrito dell'aria di coefficiente di γ proporzionale alla velocità.
Si studi l'equazione del moto dell'oggetto.

Al momento che l'oggetto è lasciato schizzare in aria, su di esso sono esercitate 3 forze: quella dovuta alla molla, quella dovuta alla resistenza dell'aria, quella dovuta al peso. Poichè non ci interessa la situazione di equilibrio ma quella in cui l'oggetto si muove, avremo la seguente equazione del moto:

$$F_{molla} - F_{aria} - F_{peso} = ma \Longrightarrow -kx - \gamma v - mg = ma$$

che tenendo conto delle relazioni che intercorrono tra spazio, velocità e accelerazione rispetto al tempo e posti $= \frac{1}{\tau}\frac{\gamma}{m}$ e $w_0^2 = \frac{k}{m}$, portano a

$$x''(t) + \frac{1}{\tau}x'(t) + w_0^2 x = -g$$

ovvero una equazione lineare non omogenea del secondo ordine.
Dunque prima di studiare l'intera equazione studiamo quella omogenea associata, che come sappiamo dai teoremi prima esposti va studiata in tre casi, al variare del suo discriminante $d = \frac{1}{\tau^2} - 4w_0^2$, e poi utilizzeremo i risultati ottenuti per ottenere le soluzioni generali in ciascun caso.

0.2.1 Discriminante nullo

Poichè il discriminante delle'equazione omogenea associata $x''(t) + \frac{1}{\tau}x'(t) + w_0^2 x = 0$ è $d = \frac{1}{\tau^2} - 4w_0^2$, avremo la condizione $2w_0\tau = 1$.
Utilizzando il teorema (3), e svolgendo gli opportuni calcoli, avremo che l'equazione oraria del moto è

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}(A + Bt)$$

in funzione delle due costanti generiche A, B, univocamente determinate non appena siano assegnate le condizioni iniziali, ovvero $x(0) = 0$ e $v(0) = x'(0) = 0$.

Dobbiamo adesso risolvere l'equazione differenziale non omogenea assegnata. Scriviamo la soluzione dell'omogenea associata nella forma

$$x(t) = A(e^{-\frac{t}{2\tau}}) + B(te^{-\frac{t}{2\tau}})$$

in modo da favorire la corrispondenza con il teorema (4) e con quello delle variazioni delle costanti.
Il wronskiano della coppia di funzioni risolutrici, è

$$W(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}[e^{-\frac{t}{2\tau}} - \frac{t}{2\tau}e^{-\frac{t}{2\tau}}] + \frac{t}{2\tau}e^{-\frac{t}{2\tau}}e^{-\frac{t}{2\tau}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Possiamo procedere a partire da questo risultato per costruire le funzioni t_1 e t_2 richieste dal teorema (4), oppure procedere con le variazioni delle costanti, cioè cerchiamo due funzioni di t $A(t), B(t)$ tali che

$$\begin{cases} A'(t)u_1(t) + B'(t)u_2(t) = 0 \\ A'(t)u_1'(t) + B'(t)u_2'(t) = r \end{cases}$$

dove u_1, u_2 sono la coppia di funzioni risolutrici e $r = -g$ in questo caso. Procederemo con questo metodo, risolvendo il sistema e determinando le funzioni incognite in modo da stabilire la legge oraria

$$x(t) = A(t)u_1(t) + B(t)u_2(t)$$

che è una soluzione generale.
Dunque, si ricava subito dalla prima equazione del sistema A', che andato sostituito nella seconda equazione porta a

$$B'(t) = -ge^{\frac{t}{2\tau}} \Longrightarrow B(t) = -2\tau e^{\frac{t}{2\tau}} + c_1$$

Da cui, svolgendo e ricavando $A(t)$:

$$A(t) = 4\tau^2 ge^{\frac{t}{2\tau}} - 2\tau gte^{\frac{t}{2\tau}} + c_2$$

da cui, per quanto detto in precedenza, e svolgendo semplici operazioni di somma e prodotto si ottiene

$$x(t) = -4\tau^2 g + e^{-\frac{t}{2\tau}}(c_1 t - c_2)$$

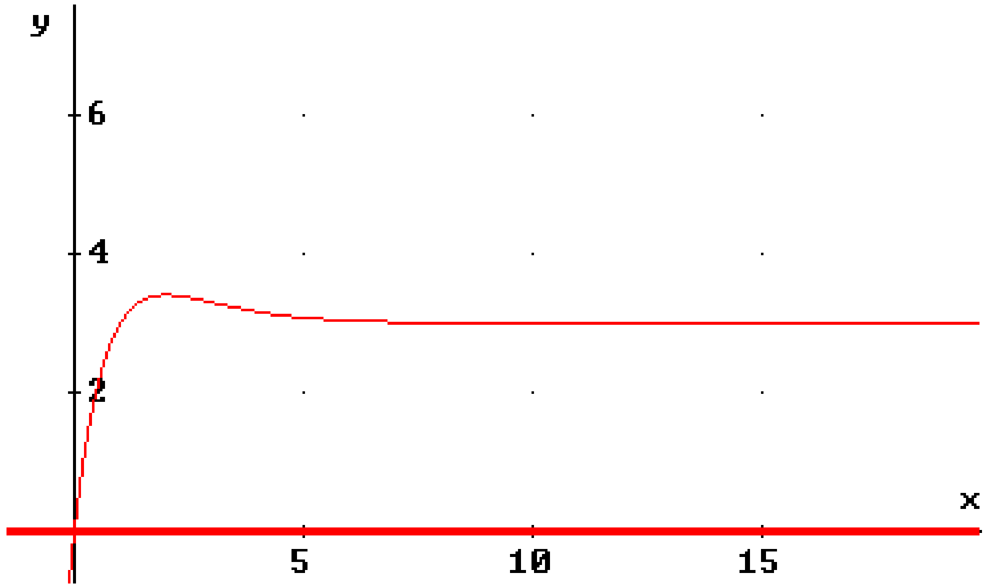
che è la soluzione generale.

- Per $x(0) = 0$ e $x(0) = 4\tau^2 g + c_2$ si ha $c_1 = -4\tau^2 g$;
- Per $v(0) = x'(0) = 0$ e $x'(0) = c_1 - c_2 \frac{1}{2\tau}$ si ha $c_2 = -8\tau^3 g$.

Questo significa che la soluzione con le condizioni iniziali richieste e nel caso particolare $2w_0\tau = 1$ è

$$x(t) = 4\tau^2 g e^{-\frac{t}{2\tau}}[2\tau - t] - 4\tau^2 g$$

L'andamento è del tipo mostrato in figura:



0.2.2 Discriminante positivo

Poichè il discriminante delle'equazione omogenea associata $x''(t) + \frac{1}{\tau}x'(t) + w_0^2 x = 0$ è $d = \frac{1}{\tau^2} - 4w_0^2$, avremo la condizione $2w_0\tau < 1$.
Per il teorema (3) la legge oraria del moto sarà:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}(Ae^{\frac{t}{2\tau}\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}} + Be^{-\frac{t}{2\tau}\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}})$$

ovvero

$$x(t) = A[e^{-\frac{t}{2\tau}(1-\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})}] + B[e^{-\frac{t}{2\tau}(1+\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})}]$$

dove dobbiamo ricavare A e B.
Il wronskiano della coppia di funzioni risolutrici, è

$$W(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

e anche qui procederemo con il metodo delle variazioni delle costanti.
Evitando di ripetere le considerazioni precedenti, in questo caso il sistema di equazioni dà le soluzioni

$$\begin{cases} A(t) = -4\frac{\tau^2 g}{\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}(1-\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})}e^{\frac{t}{2\tau}(1-\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})} + c_1 \\ B(t) = 4\frac{\tau^2 g}{\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}(1+\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})}e^{\frac{t}{2\tau}(1+\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})} + c_2 \end{cases}$$

da cui, la legge oraria del moto risulta essere, dopo qualche passaggio:

$$x(t) = 2\frac{g}{w_0^2} + c_1 e^{-\frac{t}{2\tau}(1-\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})} + c_2 e^{-\frac{t}{2\tau}(1+\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})}$$

che è la soluzione generale. Imponendo le condizioni iniziali, risulta:

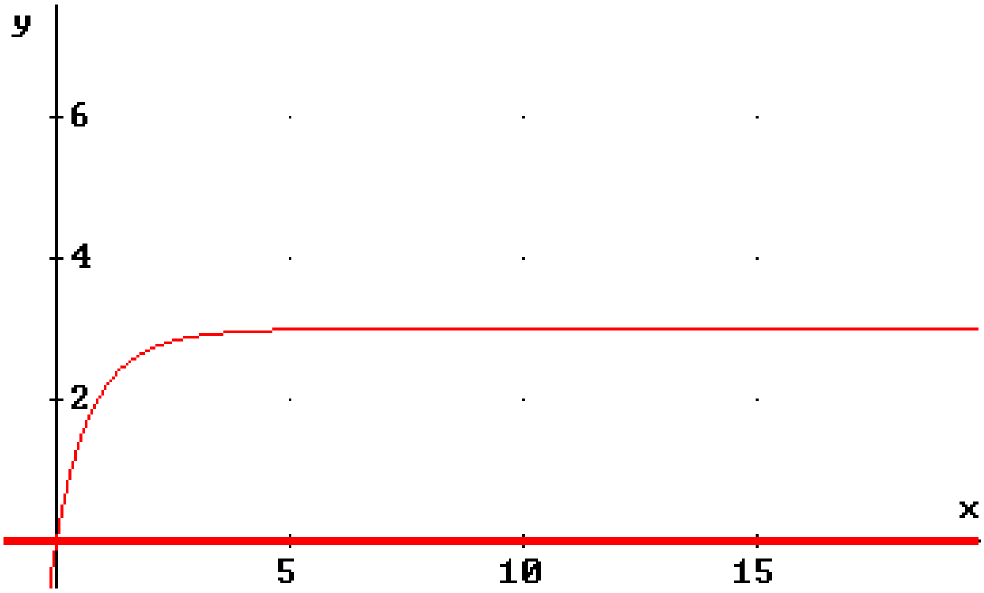
- $c_1 = -\frac{g}{w_0^2}[1 + \frac{1}{\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}}]$;

- $c_2 = -\frac{g}{w_0^2}[1 - \frac{1}{\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}}]$.

Questo significa che la soluzione con le condizioni iniziali richieste e nel caso particolare $2w_0\tau < 1$ è

$$\begin{aligned} x(t) = 2\frac{g}{w_0^2} - \frac{g}{w_0^2}[1 + \frac{1}{\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}}]e^{-\frac{t}{2\tau}(1-\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})} + \\ -\frac{g}{w_0^2}[1 - \frac{1}{\sqrt{1-4w_0^2\tau^2}}]e^{-\frac{t}{2\tau}(1+\sqrt{1-4w_0^2\tau^2})} \end{aligned}$$

dove se $t \longrightarrow +\infty$ si ha $x(t) = 2\frac{g}{w_0^2}$, cioè il moto dell'oggetto tende ad essere a velocità costante, pur dipendendo dalla sua massa per via della presenza di w_0.
Invece se $2w_0\tau << 1$, si ha $x(t) \approx 0$, cioè lo spostamento è quasi nullo per ogni t: quindi la forza di attrito unita a quella del peso è così forte rispetto a quella della molla che non fa spostare l'oggetto se non di pochissimo.
L'andamento è del tipo mostrato in figura:



0.2.3 Discriminante negativo

Poichè il discriminante delle'equazione omogenea associata $x''(t) + \frac{1}{\tau}x'(t) + w_0^2 x = 0$ è $d = \frac{1}{\tau^2} - 4w_0^2$, avremo la condizione $2w_0\tau > 1$.
Per il teorema (3) la legge oraria del moto sarà:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}[A\cos(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1}) + B\sin(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})]$$

ossia

$$x(t) = A[e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})] + B[e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})]$$

dove dobbiamo ricavare A e B.
Il wronskiano della coppia di funzioni risolutrici, è

$$W(t) = \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1}$$

e anche qui procederemo con il metodo delle variazioni delle costanti.
Evitando di ripetere le considerazioni precedenti, in questo caso il sistema di equazioni, dopo qualche noioso passaggio algebrico, dà le soluzioni

$$\begin{cases} A(t) = -\frac{g}{w_0^2}e^{-\frac{t}{2\tau}}[\sin(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})\frac{1}{\sqrt{4w_0^2\tau^2-1}} + \cos(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})] + c_1 \\ B(t) = \frac{g}{w_0^2}e^{-\frac{t}{2\tau}}[\cos(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})\frac{1}{\sqrt{4w_0^2\tau^2-1}} - \sin(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})] + c_2 \end{cases}$$

da cui, la legge oraria del moto risulta essere

$$x(t) = -\frac{g}{w_0^2} + c_1 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1}) + c_2 e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1})$$

che è la soluzione generale. Imponendo le condizioni iniziali, risulta:

- $c_1 = \frac{g}{w_0^2}$;
- $c_2 = \frac{g}{w_0^2\sqrt{4w_0^2\tau^2-1}}$.

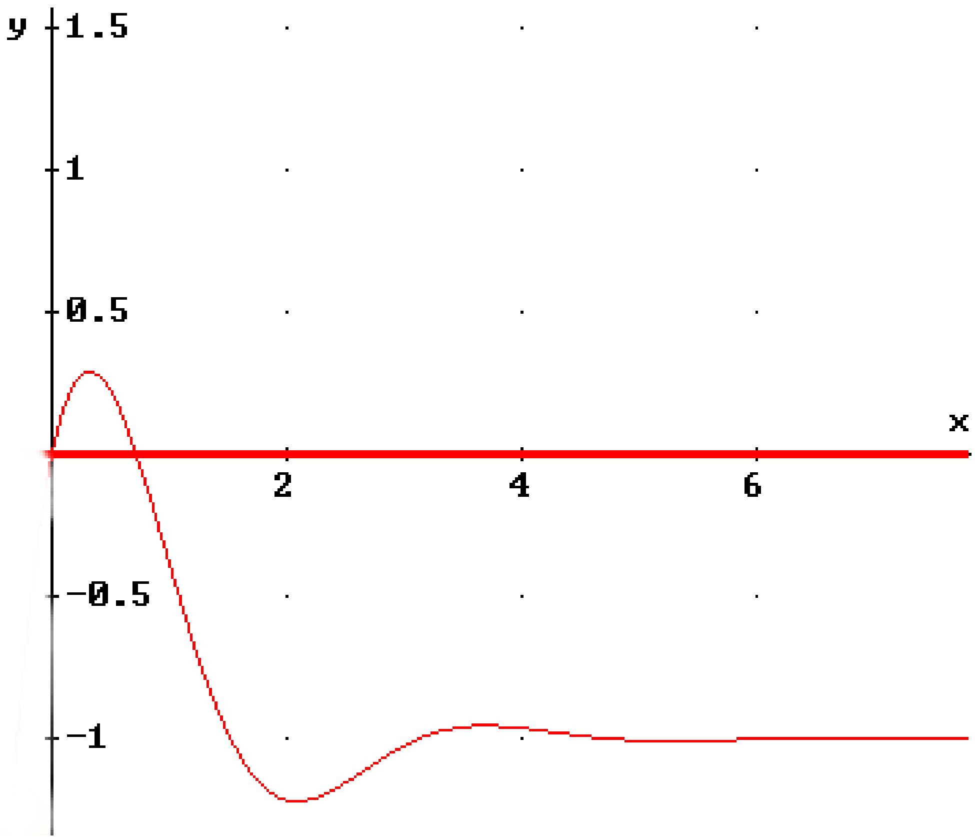
Questo significa che la soluzione con le condizioni iniziali richieste e nel caso particolare $2w_0\tau > 1$ è

$$\begin{aligned} x(t) = & -\frac{g}{w_0^2} + \frac{g}{w_0^2} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1}) + \\ & + \frac{g}{w_0^2\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\frac{t}{2\tau}\sqrt{4w_0^2\tau^2 - 1}) \end{aligned}$$

dove per $t \longrightarrow +\infty$ si ha $x(t) = -\frac{g}{w_0^2}$, mentre per $2w_0\tau >> 1$ si ha

$$x(t) \approx -\frac{g}{w_0^2} + \frac{g}{w_0^2} e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(w_0 t) + \frac{g}{2w_0^3\tau} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(w_0 t)$$

L'andamento è del tipo mostrato in figura:


y
1.5
1
0.5
-0.5
-1
x
2
4
6