

# Studio del moto di un $n$ –pendolo complesso

Manlio De Domenico

## Sommario

Quello che segue è uno studio razionale del moto di un pendolo composto da  $n$  asticine<sup>1</sup> di lunghezza variabile nel tempo, dunque estensibili, con a capo una massa anch'essa variabile nel tempo. Scopo dello studio è quello di ottenere un fondo matematico per quando verrà studiato il caso in cui le asticine siano uguali e di lunghezza infinitesima, in modo da ottenere, approssimata, una corda legata a un punto, e poter studiare il suo moto.

## 1 Schema del sistema

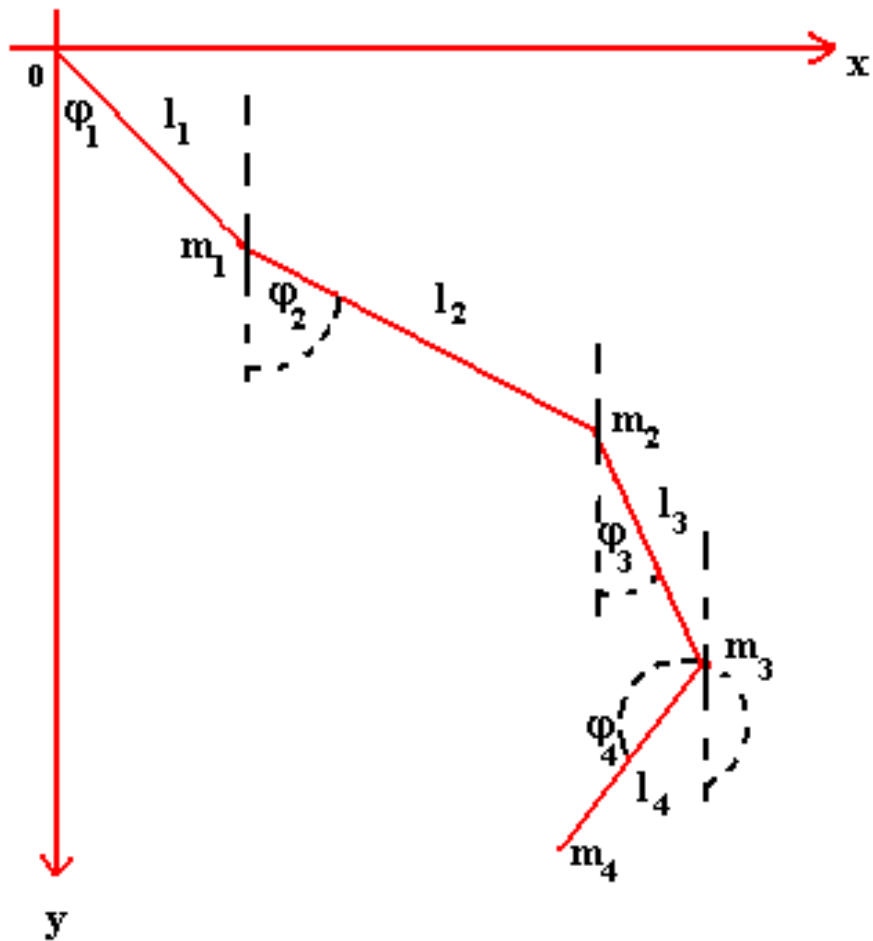
Il problema richiede lo studio del moto di un sistema composto da  $n$  asticine estensibili, con a capo dell'estremo inferiore una massa  $m$  nota e anch'essa variabile nel tempo.

Inoltre ogni asticina forma un angolo  $\varphi$  con la verticale parrallela all'asse delle ordinate.

Il sistema è vincolato a compiere il suo moto su un piano. Quanto detto può facilmente essere schematizzato in un sistema di riferimento cartesiano, assumendo come coordinate lagrangiane le  $\varphi_i$  e le  $\dot{\varphi}_i$ , come segue:

---

<sup>1</sup>Lo schema del sistema è rappresentato in figura.



## 2 Impostazione del problema

Scegliamo come coordinate lagrangiane le  $\varphi$  e le  $\dot{\varphi}$ , ed esprimiamo in coordinate cartesiane  $(x_i, y_i)$  le posizioni dei punti materiali  $m_i$  al variare del tempo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 & y_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \\
 x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 & y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \\
 \vdots & & \vdots & \\
 x_i &= \sum_{j=1}^i l_j \sin \varphi_j & y_i &= \sum_{j=1}^i l_j \cos \varphi_j
 \end{aligned}$$

Le energie cinetiche  $T_i = \frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)$  e le energie potenziali  $U_i = -m_i g y_i$

sono, esplicitando:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \left[ \left( \sum_{j=1}^i l_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^i l_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$U_i = -m_i g \sum_{j=1}^i l_j \cos \varphi_j \quad (2)$$

Una volta ottenute le espressioni di energia cinetica e potenziale, possiamo esprimere il lagrangiano

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n U_i \quad (3)$$

ovvero

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[ \left( \sum_{j=1}^i l_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^i l_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left[ \sum_{j=1}^i l_j \cos \varphi_j \right] \quad (4)$$

Le equazioni del moto si ottengono dalle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi}, t)}{\partial \dot{\varphi}_h} - \frac{\partial L(\varphi, \dot{\varphi}, t)}{\partial \varphi_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Le (5), esplicitate, dopo alcuni noiosi passaggi algebrici, restituiscono le  $h$  (con  $h = 1, 2, \dots, n$ ) equazioni cercate del moto del sistema:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \dot{m}_i \left[ l_h \cos \varphi_h \left( \sum_{j=1}^i \dot{l}_j \sin \varphi_j + l_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j \right) \right] + \\ & - \sum_{i=1}^n \dot{m}_i \left[ l_h \sin \varphi_h \left( \sum_{j=1}^i \dot{l}_j \cos \varphi_j - l_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i \left[ l_h \cos \varphi_h \left( \sum_{j=1}^i \ddot{l}_j \sin \varphi_j + 2\dot{l}_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j - l_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j^2 + l_j \cos \varphi_j \ddot{\varphi}_j \right) \right] + \\ & - \sum_{i=1}^n m_i \left[ l_h \sin \varphi_h \left( \sum_{j=1}^i \ddot{l}_j \cos \varphi_j - 2\dot{l}_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j - l_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j^2 - l_j \sin \varphi_j \ddot{\varphi}_j \right) \right] + \\ & - \sum_{i=1}^n m_i g l_h \cos \varphi_h = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Quanto trovato, ci aiuta subito nello studio del medesimo sistema, nel caso in cui  $l_i = dl$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), infatti si ottiene subito dalle (6), posto  $\varphi_{hj} = \varphi_h - \varphi_j$ :

$$dl \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \left[ \sum_{j=1}^i \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_{hj} + \ddot{\varphi}_j \cos \varphi_{hj} \right] + \sum_{i=1}^n \dot{m}_i \left[ \sum_{j=1}^i \dot{\varphi}_j \cos \varphi_{hj} \right] \right\} = \sum_{i=1}^n m_i g \cos \varphi_h \quad (7)$$

La (7) ha una profonda interpretazione. Essa rappresenta le equazioni del moto di una corda per  $n \rightarrow +\infty$ .

E' ovvio che essa rappresenta infinite equazioni, che pertanto non potremo risolvere se non con metodi analitici.

Proseguendo in maniera analoga si dimostra facilmente che se il capo dell' $n$ -pendolo è vincolato non ad un punto fisso, ma ad una curva qualsiasi di equazioni parametriche  $x = \Phi(t)$  e  $y = \Psi(t)$ , si arriva ad un'analogia delle (6), ovvero:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \dot{m}_i [l_h \cos \varphi_h (\dot{\Phi} + \sum_{j=1}^i \dot{l}_j \sin \varphi_j + l_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j)] + \\ & - \sum_{i=1}^n \dot{m}_i [l_h \sin \varphi_h (\dot{\Psi} + \sum_{j=1}^i \dot{l}_j \cos \varphi_j - l_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j)] + \\ & + \sum_{i=1}^n m_i [l_h \cos \varphi_h (\ddot{\Phi} + \sum_{j=1}^i \ddot{l}_j \sin \varphi_j + 2\dot{l}_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j - l_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j^2 + l_j \cos \varphi_j \ddot{\varphi}_j)] + \\ & - \sum_{i=1}^n m_i [l_h \sin \varphi_h (\ddot{\Psi} + \sum_{j=1}^i \ddot{l}_j \cos \varphi_j - 2\dot{l}_j \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j - l_j \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j^2 - l_j \sin \varphi_j \ddot{\varphi}_j)] + \\ & - \sum_{i=1}^n m_i g l_h \cos \varphi_h = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Le equazioni della corda in questo caso più generale, sono:

$$\begin{aligned} & dl \left\{ \sum_{i=1}^n m_i \left[ \sum_{j=1}^i \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_{hj} + \ddot{\varphi}_j \cos \varphi_{hj} \right] + \sum_{i=1}^n \dot{m}_i \left[ \sum_{j=1}^i \dot{\varphi}_j \cos \varphi_{hj} \right] \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^n [\dot{m}_i (\dot{\Phi} \cos \varphi_h - \dot{\Psi} \sin \varphi_h) + m_i (\ddot{\Phi} \cos \varphi_h - \ddot{\Psi} \sin \varphi_h)] + \sum_{i=1}^n m_i g \cos \varphi_h \quad (9) \end{aligned}$$

ottenendo una analoga, ma più complessa, delle (7), con le stesse considerazioni.