

Legge che lega la pressione all'altezza del punto dove è misurata

Manlio De Domenico

Sommario

Quello che segue è uno studio sulla dipendenza della pressione dall'altezza del punto in cui è misurata rispetto al centro della Terra. Quanto sarà detto è valido per ogni pianeta, a patto di utilizzare le corrette costanti.

La ricerca si è svolta nel caso di un'approssimazione per gas ideali, e nel caso di gas reali¹.

1 Approssimazione per gas ideali

Si consideri un disco di massa infinitesima e spessore infinitesimo, di superficie alla base A in equilibrio in un fluido.

Sul disco agiscono la forza peso e le forze di pressione dall'alto verso il basso e dal basso verso l'alto. Le forze di pressione laterali si annullano a vicenda.

Dunque possiamo riassumere tutto con l'equazione

$$pA - (p + dp)A - gdm = 0$$

Sviluppando e tenendo conto che $dm = \rho A dy$, denotando con ρ la densità e con dy lo spessore del disco, avremo dalla precedente:

$$dp = -\rho g dy \tag{1}$$

Tuttavia $g = g(y)$ e $\rho = \rho(p, T)$, indicata con T la temperatura. Pertanto prima di procedere alla risoluzione dell'equazione differenziale, dobbiamo esplicitare le funzioni $g(y)$ e $\rho = \rho(p, T)$.

1.1 Ricerca di $g(y)$

Per definizione sappiamo che

$$g(y) = G \frac{M_{Terra}}{(R_{Terra} + y)^2} \tag{2}$$

¹A partire dall'equazione di stato di Van Der Waals.

Poichè nei pressi della superficie terrestre è $g_0 = G \frac{M_{Terra}}{R_{Terra}^2}$ avremo in definitiva

$$g(y) = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{y}{R_{Terra}}\right)^2} \quad (3)$$

D'ora in avanti non specificheremo più che parliamo del pianeta Terra e indicheremo in generale il raggio.

1.2 Ricerca di $\rho(p, T)$

In una zona della Terra è difficile che sia presente un solo gas, ma è più probabile che ve ne siano diversi, ciascuno con la propria concentrazione.

Supponendo tali gas ideali, possiamo utilizzare l'equazione di stato e ricavare la densità per il generico gas:

$$pV = nRT \implies p \frac{m}{\rho} = \frac{m}{M^{mol}} RT \implies \rho(p, T) = \frac{M^{mol}}{R} \frac{p}{T} \quad (4)$$

indicata con M^{mol} la massa molare del gas, che d'ora in avanti chiameremo semplicemente M .

Volendo considerare tutti i gas, ciascuno con la propria concentrazione α_i , avremo la seguente densità *pesata*:

$$\bar{\rho}(p, T) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{M_i}{R} \frac{p}{T_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (5)$$

che può essere scritta semplicemente $\bar{\rho}(p, T) = cp$, dove c è la costante che indica tutte le somme della (5) e p è in evidenza poichè a diverse concentrazioni e a temperature diverse, le pressioni dei gas sono tutte identiche nella stessa zona.

1.3 Equazione finale

A questo punto siamo in grado di scrivere la nostra relazione tenendo conto dei risultati (1), (3), (5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{dp}{p} = -g_0 R_{Terra} \frac{d\left(1 + \frac{y}{R_{Terra}}\right)}{\left(1 + \frac{y}{R_{Terra}}\right)^2} &\implies \int_{p_0}^p \frac{1}{c} \frac{dp}{p} = - \int_0^h g_0 R_{Terra} \frac{d\left(1 + \frac{y}{R_{Terra}}\right)}{\left(1 + \frac{y}{R_{Terra}}\right)^2} \implies \\ &\implies \frac{1}{c} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g_0 R_{Terra}^2}{R_{Terra} + h} - g_0 R_{Terra} \end{aligned}$$

Posto $\lambda_{gas} = c g_0 R_{Terra}$, si ottiene infine

$$p = p_0 e^{-\lambda_{gas} \frac{h}{R_{Terra} + h}} \quad (6)$$

con

$$\lambda_{gas} = \frac{g_0 R_{Terra}}{R} \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{M_i}{T_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad (7)$$

che funzione delle caratteristiche di ogni singolo gas (concentrazione, massa molare, temperatura).

2 Equazione per gas reali

Per ricavare un'equazione meno approssimativa, possiamo procedere come per il caso di prima, soltanto che questa volta l'equazione di stato per la ricerca di ρ in funzione di p è quella di Van Der Waals:

$$(p + a \frac{n^2}{v^2})(V - nb) = nRT \quad (8)$$

con a e b due opportune costanti di proporzionalità che dipendono dal gas in questione.

Andando a sostituire $n = \frac{m}{M}$ e $V = \frac{m}{\rho}$, dopo qualche semplice passaggio algebrico si ottiene l'espressione

$$p = RT \frac{\rho}{M - b\rho} - a \frac{\rho^2}{M^2} \quad (9)$$

Ricavare la ρ come nel caso precedente avrebbe portato alla risoluzione di un'equazione di 3° completa; possiamo risolvere il problema in maniera molto meno complessa.

Poichè $p = p(\rho)$, avremo $dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho$, dunque la (1) può essere scritta

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} d\rho = -g(y) dy \quad (10)$$

Passando dunque alla derivata parziale in ρ della (9), si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = [MRT \frac{1}{(M - b\rho)^2} - 2 \frac{a}{M^2} \rho] \quad (11)$$

andando a sostituire la (11) nella (10) si ottiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} [MRT \frac{1}{\rho(M - b\rho)^2} - 2 \frac{a}{M^2} \rho] d\rho = - \int_{h_0}^h g_0 R \frac{d(1 + \frac{y}{R})}{(1 + \frac{y}{R})^2}$$

Risolvendo l'integrale (ed essendo R la costante universale dei gas) e ricordando la (9):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{RT}{M} \ln \left[\frac{1}{RT} \left(p + \frac{a}{M^2} \rho^2 \right) \right] + RT \frac{1}{M - b\rho} - 2 \frac{a}{M^2} \rho \right]_{\rho_0}^{\rho} = \\ & = -g_0 R_{Terra}^2 \frac{\Delta h}{(R_{Terra} + h_0)(R_{Terra} + h)} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \ln \left[\left(p + \frac{a}{M^2} \rho^2 \right) / \left(p_0 + \frac{a}{M^2} \rho_0^2 \right) \right] - \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) = \\ \xi(gas, \rho, T) - \zeta(gas, h, T) \end{aligned} \quad (12)$$

posti

$$\xi(gas, \rho, T) = \frac{2a}{MRT} \Delta \rho - \frac{M}{T} \left(\frac{T}{M - b\rho} - \frac{T_0}{M - b\rho_0} \right) \quad (13)$$

$$\zeta(gas, h, T) = \frac{Mg_0 R_{Terra}^2}{RT} \frac{\Delta h}{(R_{Terra} + h_0)(R_{Terra} + h)} \quad (14)$$

che sono due funzioni dal risultato adimensionale.

Dalla (12) si ottiene subito risolvendo rispetto a p :

$$p = \frac{T}{T_0} \left(p_0 + \frac{a}{M^2} \rho_0^2 \right) e^{\xi(gas, \rho, T) - \zeta(gas, h, T)} - \frac{a}{M^2} \rho^2 \quad (15)$$

Tuttavia tale espressione è vera se e soltanto se il gas in questione è uno solo: infatti entrambe le funzioni ξ e ζ dipendono dalle caratteristiche del gas (Massa molare e coefficienti di Van Der Waals).

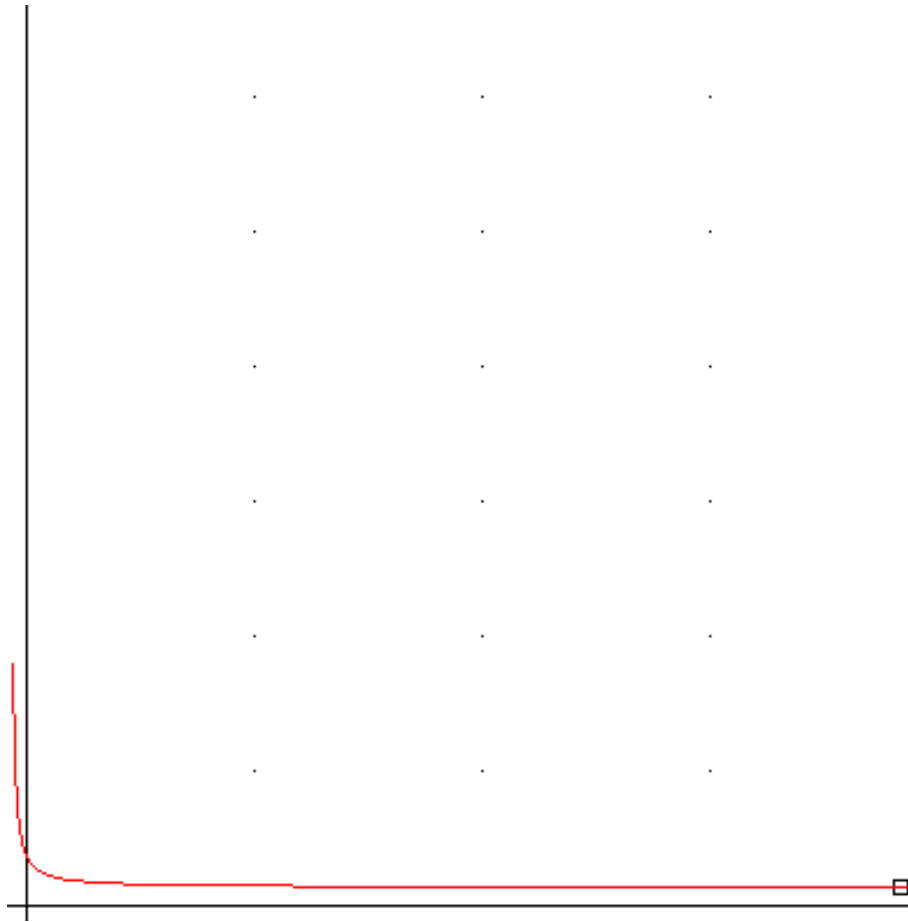
La pressione *pesata* di n gas presenti, sarà allora

$$\bar{p} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \left(p_0 + \frac{a_i}{M_i^2} \rho_0^2 \right) e^{\xi_i(gas, \rho, T) - \zeta_i(gas, h, T)} - \sum_1^n \alpha_i \frac{a_i}{M_i^2} \rho_i^2}{\sum_1^n \alpha_i} \quad (16)$$

con α_i la concentrazione dell' i -esimo gas.

Non considerando le costanti di Van Der Waals per un caso molto approssimato, in cui la temperatura è costante rispetto all'altezza e un solo gas nell'atmosfera, nonchè $h_0 = 0$ sul livello del mare, otteniamo immediatamente un'espressione identica alla (6), con $\lambda_{gas} = \frac{Mg_0 R_{Terra}}{RT}$.

Dunque il modello per gas reali è una migliore approssimazione del precedente. Presentiamo un grafico illustrativo di $p = p(h)$, riportando in ascisse le altezze e in ordinate le pressioni corrispondenti:



dove la retta asintoto parallela alle ascisse si ottiene per distanze sempre maggiori dal centro del pianeta.