

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN FISICA

FRANCESCO ZUCCARELLO

UN PARTICOLARE GAS DI FERMI:
LE NANE BIANCHE

—————
TESINA DI MECCANICA STATISTICA
—————

Prof. A. Rapisarda

ANNO ACCADEMICO 2005/2006

Indice

1	Alcuni risultati di meccanica statistica quantistica	3
2	Il caso del gas ideale	5
3	Il gas di Fermi	9

Introduzione

Guardando il cielo notturno è possibile osservare una moltitudine di puntini di varia luminosità: è questa una delle immagini che da sempre ha accompagnato l'uomo e ne ha stimolato la curiosità. Sin da tempi remoti le stelle venivano usate come guide e già Ipparco iniziò a classificarle attribuendo loro una magnitudine¹.

La classificazione delle stelle non si è fermata ovviamente ai tempi dello studioso greco e i progressi sono stati numerosi: analizzando la luce proveniente dalle stelle si può determinare la loro temperatura superficiale e, con particolari strumenti, si possono fare misure quantitative della loro luminosità, ovvero del flusso di radiazione uscente dalla loro superficie.

Un passo successivo è quello di porre in un diagramma Temperatura-Luminosità i dati relativi alle diverse stelle: facendo così si vede che esse si distribuiscono in particolari regioni di questo.

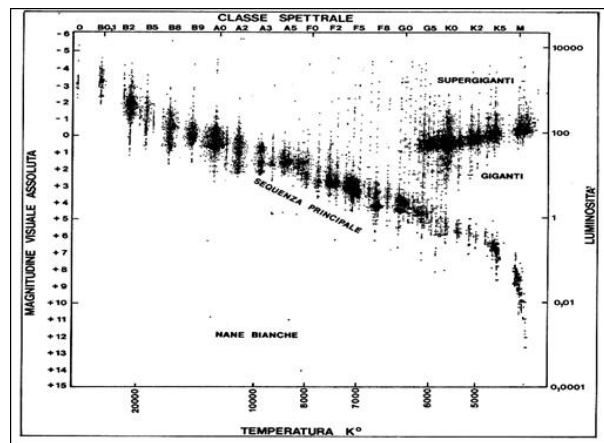


Figura 1: Diagramma di Hertzsprung-Russell

Come si vede in figura la zona più popolata è quella che attraversa in diagonale tale diagramma, ciò significa che le stelle trascorrono la maggior parte della loro in una particolare fase, detta di sequenza principale, per la quale esiste una relazione tra luminosità e temperatura.

Procedendo oltre nell'analisi è possibile mostrare l'esistenza di una relazione empirica, ovvero osservativa, tra la massa della stella e la sua luminosità e tra la massa e il raggio². Queste relazioni possono essere dedotte dai modelli di struttura stellare basati su quattro equazioni differenziali:

- continuità della massa

¹Infatti, a parità di distanza, più luminose sono le stelle più grandi ci appaiono

² $L \sim M^{3,3}$ e $R \sim M^{0,7}$

- equilibrio idrostatico
- trasporto radiativo
- equilibrio termico

Naturalmente i modelli odierni permettono di fare previsioni molto più dettagliate di quelle alle quali abbiamo accennato.

Esistono però degli astri che hanno una temperatura e una luminosità che si discostano da quelle tipiche delle stelle di sequenza principale: hanno tutte più o meno la stessa massa del sole, ma il loro raggio è dell'ordine di quello terrestre³. Inoltre i modelli stellari che ben spiegano le stelle di sequenza principale non riescono a giustificare la stabilità di queste stelle, che per il loro particolare colore e per le loro ridotte dimensioni sono dette *nane bianche*.

Lo sviluppo della meccanica statistica e la successiva formalizzazione matematica della teoria di Fermi-Dirac hanno dato agli astronomi la possibilità di spiegare, almeno in parte, l'enigma della stabilità di questi astri. In questo lavoro ci proponiamo di presentare questi risultati.

1 Alcuni risultati di meccanica statistica quantistica

Consideriamo un sistema di \aleph particelle identiche e non interagenti caratterizzato dall'hamiltoniano \hat{H} e sia $\psi(\mathbf{r}_i, t)$ la sua funzione d'onda la quale obbedisce all'equazione di Schrödinger. In particolare possiamo considerare la funzione d'onda del sistema come somma delle funzioni d'onda delle singole particelle che lo compongono le $\psi^k(t)$. Dette φ_n le autofunzioni dell'hamiltoniano le $\psi^k(t)$ si possono scrivere come:

$$\psi^k(t) = \sum a_n^k(t) \varphi_n \quad (1)$$

dove

$$a_n^k(t) = \int \varphi_n^* \psi^k(t) d\tau \quad (2)$$

Possiamo ora introdurre la *matrice densità* così definita

$$\varrho_{mn}(t) = \frac{1}{\aleph} \sum_{k=1}^{\aleph} \{a_m^k(t) a_n^{k*}(t)\} \quad (3)$$

Se come base scegliamo quella costituita dalle autofunzioni dell'hamiltoniano, la matrice densità assume una forma diagonale, comunque in generale si può affermare che la matrice è simmetrica, infatti in condizioni di equilibrio termico la probabilità di passare dallo stato n a quello m è uguale alla probabilità che si verifichi la transizione inversa. Inoltre dalla 3 si ha $\varrho^2 = \varrho$.

Nel caso dell'ensemble microcanonico e nell'assunzione della validità del principio di *equiprobabilità a priori* per la matrice densità possiamo scrivere:

$$\varrho_{mn} = \varrho_n \delta_{mn} \quad (4)$$

³circa un centesimo di quello solare

dove

$$\varrho_n = \begin{cases} 1 & \text{perognistatoaccessibile} \\ 0 & \text{pertuttiglialtristati} \end{cases} \quad (5)$$

Nel caso dell'ensamble canonico, ricordiamo che la probabilità che un sistema scelto a caso si trovi con una energia E è data dal fattore di Boltzaman, allora vale ancora la (4) dove:

$$\varrho_n = C \exp(-\beta E_n) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

con

$$C = \frac{1}{\sum_n \exp(-\beta E_n)} = \frac{1}{Q_N(\beta)} \quad (7)$$

dove C la costante di normalizzazione e $Q_N(\beta)$ è la *funzione di partizione*
Per l'ensamble canonico l'operatore densità si può scrivere:

$$\hat{\varrho} = \sum_n |\varphi_n \rangle \frac{1}{Q_N(\beta)} e^{-\beta E_n} \langle \varphi_n| \quad (8)$$

$$= \frac{1}{Q_N(\beta)} e^{-\beta \hat{H}} \sum_n |\varphi_n \rangle \langle \varphi_n| \quad (9)$$

$$= \frac{1}{Q_N(\beta)} e^{-\beta \hat{H}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Tr(e^{-\beta \hat{H}})} \quad (10)$$

Dalla quale si deduce che:

$$Q_N(\beta) = Tr(e^{-\beta \hat{H}}) \quad (11)$$

Infine per l'ensamble grancanonico possiamo scrivere:

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{S}(\mu, V, T)} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{n})} \quad (12)$$

Vogliamo ora soffermarci sull'indistinguibilità delle particelle identiche. Un tale sistema sarà descritto da una funzione d'onda che, se le particelle sono non interagenti, può essere scritta come prodotto delle funzioni d'onda delle singole particelle; essendo però queste indistinguibili una loro qualsiasi permutazione non deve variare il modulo quadro della funzione d'onda complessiva del sistema.

Detta $P\psi$ una permutazione si deve avere:

$$|P\psi|^2 = |\psi|^2 \quad (13)$$

questo si può verificare in due modi:

$$P\psi = \psi \text{ perqualsiasi } P \quad (14)$$

oppure

$$P\psi = \begin{cases} +\psi & \text{perpermutazionipari} \\ -\psi & \text{perpermutazionidispari} \end{cases} \quad (15)$$

Nel primo caso si dice che la funzione d'onda è simmetrica, nel secondo si dice che è antisimmetrica. Quest'ultimo tipo di funzioni può essere espresso attraverso il *determinante di Slater*, dove ogni colonna rappresenta lo stato fisico di una particella: se due colonne sono uguali il determinante si annulla!

Sistemi per i quali la funzione d'onda è antisimmetrica sono allora soggetti al principio di *esclusione di Pauli* e sono detti *fermioni*, mentre quelli per i quali la funzione d'onda è simmetrica sono detti *bosoni* e non sono soggetti al suddetto principio. Si può inoltre mostrare che posto

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi mkT)^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

se inoltre si ha

$$n\lambda^3 \ll 1 \quad (17)$$

la funzione di partizione si può scrivere

$$Q_N(\beta) = Tr(e^{-\beta\hat{H}}) = \frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda^3} \right)^N \quad (18)$$

Questo risultato è lo stesso che si ottiene con considerazioni di meccanica statistica classica, ma ora abbiamo qualcosa in più: un criterio per stabilire se il sistema può o meno essere trattato classicamente.

Se vale la (17) il sistema può essere trattato classicamente e si dice essere non degenerare altrimenti è necessaria la trattazione quantistica e il sistema si dice degenerare.

2 Il caso del gas ideale

Ci proponiamo ora di discutere la funzione di partizione e di gran partizione per un gas ideale nel caso di bosoni, di fermioni e di un gas classico. Mostriamo inoltre alcune proprietà del sistema a partire dallo studio dei numeri di occupazione.

A tal proposito consideriamo un gas ideale costituito da N particelle indistinguibili e non interagenti occupanti un volume V e con una data energia E .

Nell'ensemble microcanonico la quantità di interesse è $\Omega(N, V, T)$ ovvero il numero di microstati distinti accessibili al sistema tutti compatibili con un dato macrostato (N, V, T) . Per questo sistema esistono un grande numero di livelli accessibili. Immaginiamo di creare una collezione di «*gruppi di livelli*» che chiameremo celle di energia. Denotiamo con ε_i l'energia della i -esima cella contenente un numero $g_i \gg 1$ di livelli. Denotiamo con $\{n_i\}$ un particolare set di occupazione dei livelli, devono valere allora le seguenti condizioni:

$$\sum_i n_i = N \quad (19)$$

$$\sum_i n_i \varepsilon_i = E \quad (20)$$

allora il numero di stati distinti accessibili per il sistema è

$$\Omega(N, V, T) = \sum_{\{n_i\}} W \{n_i\} \quad (21)$$

dove $W \{n_i\}$ è il numero dei microstati distinti associati con quel particolare set $\{n_i\}$; tale numero si può scrivere:

$$W \{n_i\} = \prod_i w \{n_i\} \quad (22)$$

dove $w \{n_i\}$ è il numero di modi distinti in cui n_i particelle identiche e indistinguibili possono essere distribuite in g_i livelli di energia.

Prima di scrivere l'espressione di $W \{n_i\}$ nelle diverse statistiche, osserviamo che mentre per un sistema di bosoni si può avere $n_i > g_i$ questo non è possibile per un sistema di fermioni per il quale deve sempre essere $n_i \leq g_i$. Inoltre nella statistica di Boltzman, cioè nel limite classico, le particelle sono viste come distinguibili. Tenuto conto di queste premesse possiamo scrivere:

$$W_{B.E.} \{n_i\} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \quad (23)$$

$$W_{F.D.} \{n_i\} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!} \quad (24)$$

$$W_{M.B.} \{n_i\} = \prod_i \frac{(g_i)^{n_i}}{n_i!} \quad (25)$$

La termodinamica dei sistemi può essere ricavata, come è norma nell'ambito dell'ensamble microcanonico, dalla seguente relazione

$$S(N, V, T) = k \ln \Omega(N, V, T) = k \ln \left[\sum_{\{n_i\}} W \{n_i\} \right] \quad (26)$$

Approssimando la sommatoria con il termine più grande⁴, trattando le n_i come indipendenti, tenendo conto delle restrizioni (20) e applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo:

$$\ln \left(\frac{g_i}{n_i^*} - a \right) - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0 \quad (27)$$

dalla quale segue

$$n_i^* = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i + a}} \quad (28)$$

dove

$$a = -1 \text{ B.E.} \quad (29)$$

$$1 \text{ F.D.} \quad (30)$$

$$0 \text{ M.B.} \quad (31)$$

e $\alpha = \frac{\mu}{kT}$ e $\beta = \frac{1}{kT}$.

⁴Questo è possibile perchè la distribuzione per la quale si ha il massimo è quella più probabile, che come si può mostrare da considerazioni di meccanica statistica classica è molto più probabile di tutte le altre, quindi il rispettivo volume $\Omega(N, V, T)$ dello spazio delle fasi è molto più grande (la differenza è di ordine esponenziale) rispetto a quello occupato dalle altre configurazioni

Se adesso consideriamo la descrizione del sistema nell'ensamble canonico, la funzione di partizione si può scrivere

$$Q_N(V, T) = \sum_E e^{\beta E} \quad (32)$$

se indichiamo con n_ε il numero di particelle nel livello di energia ε , la funzione di partizione si può scrivere:

$$Q_N(V, T) = \sum'_{n_\varepsilon} g \{n_\varepsilon\} e^{-\sum_\varepsilon n_\varepsilon \varepsilon} \quad (33)$$

dove $g \{n_\varepsilon\}$ è il peso statistico per il set $\{n_\varepsilon\}$ che nelle varie statistiche si scrive:

$$g \{n_\varepsilon\}_{B.E.} = 1, \quad (34)$$

$$g \{n_\varepsilon\}_{F.D.} = 1 \text{ o } 0 \quad (35)$$

$$g \{n_\varepsilon\}_{M.B.} = \prod_\varepsilon \frac{1}{n_\varepsilon!} \quad (36)$$

Si può introdurre Maxwell Per la funzione di gran partizione possiamo scrivere

$$\mathfrak{Z}(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) = \exp\left(\frac{zV}{\lambda^3}\right) \quad (37)$$

Sostituendo i valori di $g \{n_\varepsilon\}$ nella (33) otteniamo per il caso di Fermi-Dirac e per quello di Bose-Einstein

$$Q_N(V, T) = \sum'_{n_\varepsilon} e^{-\sum_\varepsilon n_\varepsilon \varepsilon} \quad (38)$$

dove l'unica differenza tra le due statistiche sta nei diversi valori che può assumere n_ε . Sommando su tutte le particelle otteniamo la funzione di gran partizione:

$$\mathfrak{Z}(z, V, T) = \sum_{N=0}^{\infty} \left[z^N \sum'_{n_\varepsilon} e^{-\sum_\varepsilon n_\varepsilon \varepsilon} \right] \quad (39)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \left[\sum'_{n_\varepsilon} \prod_\varepsilon (ze^{\beta \varepsilon})^{n_\varepsilon} \right] \quad (40)$$

La doppia somma è equivalente alla somma su tutti i possibili valori dei numeri n_ε indipendentemente gli uni dagli altri. Possiamo allora scrivere:

$$\mathfrak{Z}(z, V, T) = \sum_{n_1, n_2, \dots} [(ze^{\beta \varepsilon_0})^{n_0} (ze^{\beta \varepsilon_1})^{n_1} \dots] \quad (41)$$

$$= \left[\sum_{n_0} (ze^{\beta \varepsilon_0})^{n_0} \right] \left[\sum_{n_1} (ze^{\beta \varepsilon_1})^{n_1} \right] \dots \quad (42)$$

Adesso, osservando che per il caso di Bose-Einstein $n = 0, 1, 2, \dots$, mentre per quello di Fermi-Dirac $n = 0, 1$

$$\mathfrak{Z}(z, V, T)_{B.E.} = \prod_{\varepsilon} \frac{1}{1 - ze^{-\beta\varepsilon}} \quad (43)$$

$$\mathfrak{Z}(z, V, T)_{F.D.} = \prod_{\varepsilon} \frac{1}{1 + ze^{-\beta\varepsilon}} \quad (44)$$

Siamo ora in grado di poter calcolare il numero di occupazione:

$$\langle n_{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{\mathfrak{Z}} \left[-\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \varepsilon} \right) \right] \quad (45)$$

$$\equiv -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial q}{\partial \varepsilon} \right) \quad (46)$$

$$= \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + a} \quad (47)$$

In figura 2 è riportato l'andamento del numero di occupazione al variare delle statistiche, si vede come nel caso della distribuzione di Fermi il $\langle n_{\varepsilon} \rangle$ non superi mai l'unità, come ci si aspetta per un sistema di particelle che obbediscono al principio di esclusione di Pauli; inoltre per $\varepsilon < \mu$ e per $|\varepsilon - \mu| \gg kT$ $\langle n_{\varepsilon} \rangle$ tende a uno.

Per un sistema di bosoni deve aversi $\mu <$ di qualsiasi ε altrimenti si otterrebbero numeri di occupazione negativi. Inoltre quando μ tende al valore più piccolo di energia accessibile per il sistema, n_{ε} tende ad infinito, ovvero il sistema diventa un *condensato di Bose-Einstein*. Infine quando si ha

$$\exp \left\{ \frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right\} \gg 1 \quad (48)$$

il contributo di a diventa trascurabile e le tre statistiche coincidono: il sistema è in regime classico. D'altra parte la (48) implica che valga

$$n_{\varepsilon} \ll 1 \quad (49)$$

cioè il numero di occupazione è molto inferiore all'unità in qualsiasi livello energetico, questo implica che $g \{n_{\varepsilon}\}$ è praticamente uguale a uno. La (48) implica che μ deve essere negativo e grande in modulo, ovvero, essendo $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$, la fugacità deve essere molto minore di uno. Nell'ensemble gran canonico il numero di particelle è dato da

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \mathfrak{Z}(z, V, T) \quad (50)$$

considerando ora il caso del gas ideale e osservando che le particelle sono delocalizzate nello spazio possiamo affermare che la $Q_N(V, T) \propto V f(T)$ e quindi la funzione di gran partizione, tenendo conto della (37), si scrive:

$$\mathfrak{Z}(z, V, T) = \exp \{ z V f(T) \} \quad (51)$$

da cui

$$N = z V f(T) \quad (52)$$

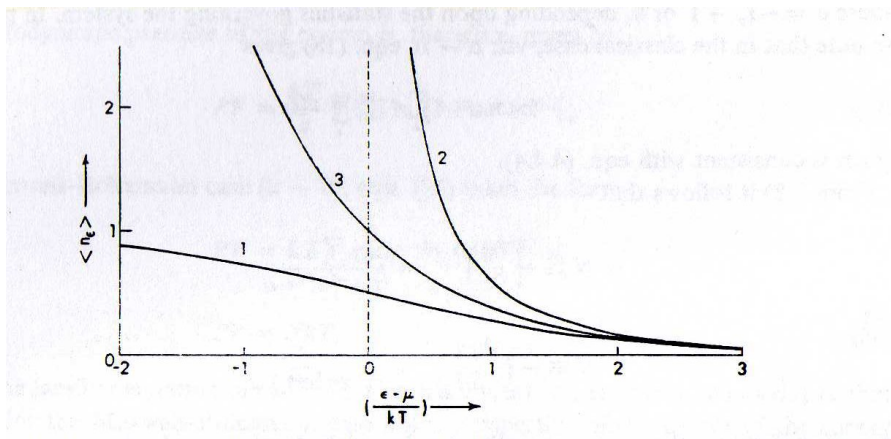


Figura 2: Andamento del numero di occupazione medio al variare della statistica applicata: 1 per i sistemi di fermioni, 2 per quelli di bosoni e 3 per i sistemi di Maxwell-Boltzmann

Applicando quanto detto al nostro caso, osservando che la $f(T)$ altro non è che λ^3 otteniamo che la (48) si riduce a

$$\frac{N\lambda^3}{V} \ll 1 \quad (53)$$

che giustifica quanto detto nella sezione precedente.

3 Il gas di Fermi

Ci concentreremo ora su un sistema di fermioni derivandone alcune proprietà fondamentali la loro termodinamica.

L'equazione di stato di un gas di Fermi si scrive

$$\frac{PV}{kT} = \ln \mathfrak{S} = \sum_{\epsilon} \ln (1 + ze^{-\beta\epsilon}) \quad (54)$$

mentre per il numero di particelle abbiamo

$$N \equiv \sum_{\varepsilon} \langle n_{\varepsilon} \rangle = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} \quad (55)$$

con $\beta = (kT)^{-1}$ e $z = \exp(\mu/kT)$.

Sostituendo le somme con i rispettivi integrali si ottiene

$$\frac{P}{kT} = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (56)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (57)$$

dove g è il peso statistico derivante dalla struttura interna del sistema, λ è la lunghezza d'onda termica data dalla (16) e

$$f_{5/2}(z) \equiv \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln(1 + ze^{-x^2}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{5/2}} \quad (58)$$

$$f_{3/2}(z) \equiv z \frac{\partial}{\partial z} f_{5/2}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{3/2}} \quad (59)$$

Il primo passo è lo studio della $f_{3/2}(z)$ a tal proposito riscriviamo la (57) come segue

$$\frac{\lambda^3}{v} = f_{3/2}(z) \quad (60)$$

dove $v = V/N$ e $g = 1$

Per piccoli valori di z la $f_{3/2}(z)$ si può sviluppare in serie come segue

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (61)$$

Per grandi z invece si può eseguire uno sviluppo asintotico di tale funzione dovuto a Sommerfeld del quale riportiamo solo i risultati

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-1/2} + \dots \right] + O(z^{-1}) \quad (62)$$

in figura 3 è riportato l'andamento, monotono crescente, di tale funzione.

Lo studio generale di questa funzione nel caso generale è analiticamente molto complesso, esistono due limiti però per i quali questo è possibile.

Alte temperature e basse densità ($\lambda^3/v \ll 1$)

In queste condizioni la distanza media tra le particelle è molto più grande di λ e quindi il comportamento del gas di Fermi dovrebbe ridursi al caso classico. Dalla (60) e dalla (61) segue

$$\frac{\lambda^3}{v} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \quad (63)$$

invertendo tale relazione

$$z = \frac{\lambda^3}{v} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 \quad (64)$$

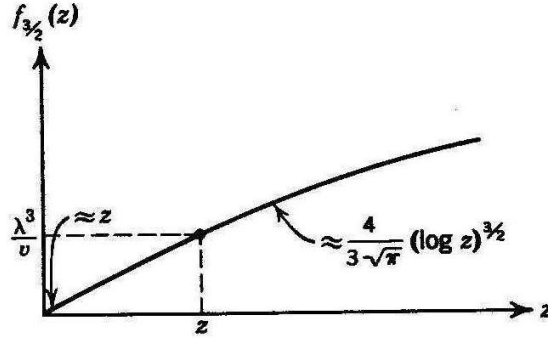


Figura 3: Andamento della $f_{3/2}(z)$

quando $T \rightarrow \infty$ (ovvero $\lambda \rightarrow 0$) z assume il valore tipico per un gas di Boltzman e per il numero di occupazione abbiamo

$$\langle n_\varepsilon \rangle \simeq \frac{\lambda^3}{v} e^{\beta\varepsilon} \quad (65)$$

infine, l'equazione di stato è

$$\frac{Pv}{kT} = \frac{\lambda^3}{v} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2} + \dots} \right) = 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} + \dots \quad (66)$$

che è l'equazione di stato di un gas ideale di Boltzman a parte piccole correzioni di origine quantistica. Tutte le altre funzioni termodinamiche del sistema si riducono a quelle di un sistema classico.

Basse temperature e alte densità ($\lambda^3/v \ll 1$)

In questo caso la distanza media delle particelle è più piccola della lunghezza d'onda termica del sistema e gli effetti quantistici, in particolare il principio di Pauli, diventano significativi.

In prossimità dello zero assoluto possiamo scrivere

$$\frac{1}{gv} \frac{2\pi\hbar^2}{mkT}^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \quad (67)$$

da cui posto

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{gv} \right)^{2/3} \quad (68)$$

possiamo scrivere

$$z \simeq e^{\beta \varepsilon_F} \quad (69)$$

allora la (55) si riduce a

$$C = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)} + 1} \quad (70)$$

da cui nel limite $T \rightarrow \infty$ si ha

$$\langle n_\varepsilon \rangle = 1 \quad \varepsilon < \varepsilon_F \quad (71)$$

$$0 \quad \varepsilon > \varepsilon_F \quad (72)$$

Questa equazione chiarisce il comportamento del gas di Fermi allo zero assoluto: tutti i livelli con energia minore di quella di Fermi sono occupati, mentre quelli con energia maggiore sono vuoti. Spesso l'ultimo livello occupato viene detto *superficie di Fermi*.

L'espressione dell'energia di Fermi si può determinare, in modo più generale, dal seguente ragionamento.

Consideriamo un sistema costituito da N particelle e caratterizzato dall'essere tutti i livelli g volte degeneri allora vale

$$g \sum_{\varepsilon} \langle n_\varepsilon \rangle = N \quad (73)$$

Il numero di fermioni all'interno della superficie di Fermi può essere determinato costruendo il volume dello spazio delle fasi a disposizione del sistema (tenendo ben presente anche la degenerazione) e dividendolo per il volume occupato da un singolo fermione, che per il principio di indeterminazione di Heisenberg possiamo scrivere $(2\pi \hbar)^3$. Tale numero è dato da

$$\frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3 = \frac{N}{V} \quad (74)$$

osservando che vale $\varepsilon_F = p_F^2/2m$ si ricava

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2}{gV} \right)^{2/3} \quad (75)$$

analoga a quanto determinato precedentemente. La (73) ci dice che i fermioni non sono soggetti ad alcun vincolo per lo scambio di della loro posizione, ma anche che un sistema costituito da N particelle ogniuna di degenerazione g può essere visto come g sistemi costituiti da N/g particelle.

Per determinare la termodinamica consideriamo intanto il potenziale chimico, che servendosi della (60) e (62) e con le opportune inversioni possiamo scrivere

$$\mu = kT \ln z = \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (76)$$

Abbiamo intitolato questa sezione *basse temperature e ...* vogliamo ora dare una definizione di *bassa temperatura*; a tal proposito definiamo la T_F tramite la seguente relazione

$$kT_F \equiv \varepsilon_F \quad (77)$$

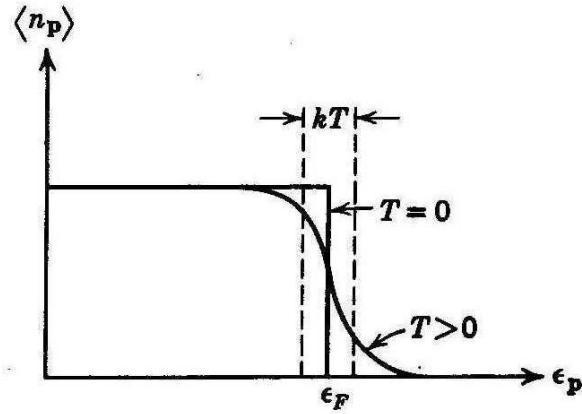


Figura 4: Funzione di distribuzione di Fermi per un gas ideale allo zero assoluto (curva a gradino) e a $T > 0$

Diremo allora *basse temperature* quando $T \ll T_F$, la T_F è detta anche temperatura di degenerazione e il sistema si dirà degenerare.

L'energia interna del sistema è

$$U \equiv \sum_{\epsilon} \epsilon \langle n_{\epsilon} \rangle \quad (78)$$

$$= \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \int_0^{\infty} dp p^4 \langle n_{\epsilon} \rangle \quad (79)$$

$$= \frac{V}{4\pi^2 m h^3} \int_0^{\infty} dp \frac{p^5}{5} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle n_{\epsilon} \rangle \right) \quad (80)$$

Dalla figura (3) si vede come $\frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle n_{\epsilon} \rangle$ *varimoltorapidamente* : *questocipermettedivalutareilfattorep⁵intor*
 $\propto C_V \rightarrow 3/2$, *si può allora tracciare un diagramma approssimativo di tale funzione (fig??)*

5

$$U/N = \frac{\int_0^{p_F} (p^2/2m) 4\pi p^2 dp}{\int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp} = \frac{3}{5} \epsilon_F$$