

Verifica delle leggi statistiche per distribuzioni casuali con una Quinconce di Galton

De Domenico Manlio

Laboratorio di Fisica Sperimentale dell'Università degli Studi di Catania

Sommario

Presento i risultati delle misure di distribuzione di 97 sferette di acciaio in una Quinconce di Galton, ottenute presso il laboratorio di Esperimentazioni di Fisica I del Dipartimento di Fisica. Tali misure sono volte a dimostrare le leggi statistiche per distribuzioni casuali.



Lo scopo dell'esperienza è quello di verificare le leggi statistiche per distribuzioni *casuali*. L'utilizzo di una Quinconce di Galton permetterà di confrontare una distribuzione di 1164 sferette (97 sferette per 12 lanci indipendenti ciascuna) con la distribuzione di Gauss prevista teoricamente e data dalla relazione

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

dove σ è la deviazione standard e \bar{x} la media dei valori.

L'analisi continuerà con il confronto con la distribuzione binomiale di Bernoulli, data dalla relazione

$$B(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (2)$$

dove x rappresenta il numero di successi previsti, n è il numero di prove effettuate e p è la probabilità di successo per ciascuna prova.

Infine la distribuzione osservata verrà confrontata anche con la distribuzione di Poisson, data dalla relazione

$$P(x) = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!} \quad (3)$$

dove x è il numero degli eventi, e μ il valore numerico previsto.

1 Apparato sperimentale

Il materiale che ho utilizzato consisteva in:

- Quinconce di Galton;
- Sferette di ferro di raggio r ;
- Contenitore di ferro.

Indicando con s_L la sensibilità di lettura, con s_M quella di misura, e con p la portata di uno strumento:

	Calibro (mm)
s_L	0.05
p	180
	Metro (mm)
s_L	1
s_M	0.5
p	15

2 Distribuzioni sperimentali e distribuzioni teoriche per lancio

La Quinconce di Galton utilizzata, consiste di una lastra piana tenuta in posizione inclinata rispetto all'orizzontale di $\vartheta = 59.145^\circ \pm 0.001^\circ$ ¹ (ruotando in senso orario), e reca piccoli chiodini d'acciaio infissi, spazati regolarmente di $d = 18.5\text{mm} \pm 0.5\text{mm}$ e disposti in file orizzontali sfalsate di un semispazio l'una rispetto all'altra.

$N=97$ sferette di acciaio di diametro $2r = 15.90\text{mm} \pm 0.05\text{mm}$, sono lasciate cadere dall'alto all'interno della Quinconce: cadendo esse urtano i chiodini e variano la loro direzione².

Le sferette seguono un percorso di 41 file orizzontali di chiodini, per poi andare a raccogliersi in 36 celle, larga ciascuna quanto la spaziatura d .

Una lastra di plexiglass copre la parte anteriore dell'apparato, e in essa sono applicati 4 fori che permettono di variare l'altezza di caduta delle sferette.

Le sfere, raccolte nelle celle, forniscono una distribuzione statistica discreta, il cui valore teorico è

$$f_j = Nf(x_j) \quad (4)$$

indicando con f_j il numero di sferette attese nella cella j -esima, con N il numero di sferette lanciate, con x_j la coordinata orizzontale della j -esima cella, e con

¹Risultato ottenuto misurando la base e l'altezza rispetto alla base dell'apparato sperimentale, pari rispettivamente a $b = 650\text{mm} \pm 1\text{mm}$ e $h = 1088\text{mm} \pm 1\text{mm}$. L'errore su ϑ è ricavato dalla legge di propagazione degli errori $\sigma_\vartheta = \sqrt{(\frac{\partial\vartheta}{\partial b})^2\sigma_b + (\frac{\partial\vartheta}{\partial h})^2\sigma_h}$, dove per costruzione $\vartheta = \arctan\frac{h}{b}$.

²Viene supposta la buona fattura dell'apparato sperimentale, pertanto la probabilità che una sferetta, cadendo, vada alla destra o alla sinistra di ogni singolo chiodino, è considerata pari a $\frac{1}{2}$.

f la funzione di distribuzione continua che voglio utilizzare per prevedere il risultato.

Scopo dell'esperienza è confrontare le 3 distribuzioni teoriche citate in precedenza, con l'istogramma sperimentale di indicatori statistici

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^C n_j x_j \quad (5)$$

$$s^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^C n_j (x_j - \bar{x})^2 \quad (6)$$

indicando con n_j il valore osservato nella j -esima cella e con C il numero di celle. La varianza $s^2(x)$ della (6) è calcolata su $N - 1$ e non su N , in quanto essa è ottenuta da N oggetti meno la \bar{x} calcolata nella (5); per cui i gradi di libertà sono proprio $N - 1$.

2.1 Distribuzione gaussiana

I valori previsti da una distribuzione gaussiana sono dati dalla relazione

$$f_j = N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

La migliore stima di μ è \bar{x} , quella di σ^2 è $s^2(x)$. Sostituendo tali valori nella (8), otteniamo la funzione di distribuzione gaussiana prevista per il lancio l -esimo:

$$f_{jl} = N \frac{1}{\sqrt{2\pi s_l^2}} e^{-\frac{(x_j - \bar{x}_l)^2}{2s_l^2}} \quad (8)$$

dove \bar{x}_l e s_l^2 sono gli indicatori statistici della distribuzione sperimentale ottenuta all' l -esimo lancio ($l = 1, 2, \dots, 12$).

Di seguito è riportato il numero di sferette per cella, per 12 lanci:

Tabella A

c_j	o_{j1}	o_{j2}	o_{j3}	o_{j4}	o_{j5}	o_{j6}	o_{j7}	o_{j8}	o_{j9}	o_{j10}	o_{j11}	o_{j12}
c_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
c_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
c_4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
c_7	0	0	3	0	0	0	1	2	0	0	0	1
c_8	0	2	0	0	1	1	1	1	3	1	1	2
c_9	1	0	1	0	2	1	0	0	2	1	0	0
c_{10}	5	4	2	2	0	1	1	0	4	4	2	2
c_{11}	0	2	0	2	1	2	3	0	2	3	2	3
c_{12}	4	4	3	4	1	2	2	2	4	3	3	3
c_{13}	6	3	4	2	1	5	6	6	2	1	3	1
c_{14}	4	5	3	4	6	3	3	1	8	4	2	5
c_{15}	10	9	4	8	6	6	4	3	3	6	6	7
c_{16}	5	6	8	6	4	4	7	7	4	8	6	9
c_{17}	4	8	7	9	10	7	11	5	9	4	6	5
c_{18}	10	5	10	8	8	4	7	13	8	13	9	10
c_{19}	9	18	11	8	14	14	6	11	5	6	9	7
c_{20}	10	6	7	11	8	9	4	13	5	5	6	4
c_{21}	6	3	8	5	3	12	11	10	8	7	12	12
c_{22}	9	6	5	5	3	6	6	1	9	8	4	5
c_{23}	2	5	7	4	5	9	9	8	7	7	7	9
c_{24}	1	7	3	5	7	3	5	3	5	3	6	3
c_{25}	2	0	4	5	5	2	0	7	3	3	1	4
c_{26}	3	0	2	4	2	1	3	0	2	3	8	1
c_{27}	1	0	1	0	3	1	3	2	0	2	1	2
c_{28}	5	2	1	2	2	0	2	0	2	2	1	2
c_{29}	0	1	0	1	2	0	1	1	1	1	1	0
c_{30}	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
c_{31}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c_{32}	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
c_{33}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c_{34}	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_{35}	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
c_{36}	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
Tot.	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97

indicando con o_{jl} la frequenza osservata all' l -esimo lancio.

Quelli che seguono sono gli indicatori statistici prima menzionati:

Tabella B

1	\bar{x}_l	s_l^2
1	18.34	21.52
2	18.05	19.57
3	18.33	25.70
4	19.19	21.88
5	19.78	24.67
6	18.67	23.47
7	19.08	24.64
8	19.22	19.67
9	18.41	28.01
10	18.39	27.20
11	19.19	21.76
12	18.55	21.35

Utilizzando i risultati della tabella B, è riportata la tabella A arricchita dei valori teorici previsti dalla distribuzione gaussiana, calcolati con la (8):

Tabella C

c_j	o_{j1}	f_{j1}	o_{j2}	f_{j2}	o_{j3}	f_{j3}	o_{j4}	f_{j4}	o_{j5}	f_{j5}	o_{j6}	f_{j6}
c_1	0	0,01	0	0,01	0	0,02	0	0,00	0	0,01	0	0,01
c_2	0	0,02	0	0,01	0	0,04	0	0,01	0	0,01	0	0,02
c_3	0	0,04	0	0,03	0	0,08	0	0,02	0	0,03	1	0,04
c_4	0	0,07	0	0,06	1	0,14	0	0,04	0	0,05	0	0,08
c_5	0	0,13	0	0,11	0	0,24	0	0,08	0	0,09	0	0,15
c_6	0	0,24	0	0,21	1	0,40	0	0,16	0	0,17	1	0,26
c_7	0	0,42	0	0,39	3	0,63	0	0,28	0	0,28	0	0,44
c_8	0	0,70	2	0,66	0	0,96	0	0,48	1	0,47	1	0,71
c_9	1	1,10	0	1,08	1	1,40	0	0,77	2	0,74	1	1,09
c_{10}	5	1,66	4	1,67	2	1,98	2	1,21	0	1,12	1	1,61
c_{11}	0	2,39	2	2,46	0	2,68	2	1,79	1	1,63	2	2,28
c_{12}	4	3,28	4	3,43	3	3,50	4	2,55	1	2,28	2	3,10
c_{13}	6	4,30	3	4,56	4	4,39	2	3,46	1	3,07	5	4,03
c_{14}	4	5,39	5	5,75	3	5,30	4	4,48	6	3,96	3	5,02
c_{15}	10	6,44	9	6,90	4	6,15	8	5,55	6	4,90	6	6,00
c_{16}	5	7,35	6	7,86	8	6,87	6	6,57	4	5,83	4	6,86
c_{17}	4	8,00	8	8,50	7	7,38	9	7,42	10	6,66	7	7,53
c_{18}	10	8,32	5	8,75	10	7,62	8	8,01	8	7,31	4	7,91
c_{19}	9	8,26	18	8,55	11	7,57	8	8,27	14	7,70	14	7,97
c_{20}	10	7,82	6	7,94	7	7,23	11	8,15	8	7,78	9	7,69
c_{21}	6	7,08	3	7,00	8	6,64	5	7,67	3	7,56	12	7,12
c_{22}	9	6,11	6	5,87	5	5,87	5	6,90	3	7,05	6	6,31
c_{23}	2	5,04	5	4,68	7	4,99	4	5,93	5	6,31	9	5,36
c_{24}	1	3,96	7	3,54	3	4,08	5	4,87	7	5,43	3	4,36
c_{25}	2	2,98	0	2,55	4	3,21	5	3,81	5	4,48	2	3,40
c_{26}	3	2,13	0	1,74	2	2,43	4	2,86	2	3,56	1	2,54
c_{27}	1	1,46	0	1,13	1	1,77	0	2,05	3	2,71	1	1,82
c_{28}	5	0,95	2	0,70	1	1,24	2	1,40	2	1,98	0	1,25
c_{29}	0	0,60	1	0,41	0	0,83	1	0,91	2	1,39	0	0,82
c_{30}	0	0,35	0	0,23	0	0,54	1	0,57	0	0,94	1	0,52
c_{31}	0	0,20	0	0,12	0	0,34	0	0,34	1	0,61	0	0,31
c_{32}	0	0,11	0	0,06	0	0,20	0	0,19	2	0,38	0	0,18
c_{33}	0	0,06	0	0,03	0	0,12	1	0,11	0	0,23	0	0,10
c_{34}	0	0,03	1	0,01	1	0,06	0	0,05	0	0,13	0	0,05
c_{35}	0	0,01	0	0,01	0	0,03	0	0,03	0	0,07	1	0,03
c_{36}	0	0,01	0	0,00	0	0,02	0	0,01	0	0,04	0	0,01

c_j	o_{j7}	f_{j7}	o_{j8}	f_{j8}	o_{j9}	f_{j9}	o_{j10}	f_{j10}	o_{j11}	f_{j11}	o_{j12}	f_{j12}
c_1	0	0,01	0	0,00	0	0,03	1	0,03	0	0,00	0	0,01
c_2	0	0,02	0	0,00	0	0,06	0	0,05	0	0,01	0	0,01
c_3	0	0,04	0	0,01	0	0,11	0	0,10	0	0,02	0	0,03
c_4	0	0,08	0	0,02	0	0,18	0	0,16	0	0,04	0	0,06
c_5	0	0,14	0	0,05	0	0,30	0	0,27	0	0,08	0	0,11
c_6	0	0,24	0	0,10	0	0,47	1	0,44	1	0,15	0	0,21
c_7	1	0,40	2	0,20	0	0,72	0	0,68	0	0,27	1	0,37
c_8	1	0,65	1	0,36	3	1,06	1	1,02	1	0,47	2	0,62
c_9	0	0,99	0	0,61	2	1,51	1	1,47	0	0,76	0	0,99
c_{10}	1	1,46	0	1,01	4	2,07	4	2,03	2	1,19	2	1,51
c_{11}	3	2,07	0	1,57	2	2,74	3	2,72	2	1,78	3	2,20
c_{12}	2	2,82	2	2,32	4	3,51	3	3,50	3	2,53	3	3,07
c_{13}	6	3,68	6	3,26	2	4,34	1	4,35	3	3,44	1	4,07
c_{14}	3	4,62	1	4,36	8	5,17	4	5,21	2	4,47	5	5,16
c_{15}	4	5,56	3	5,55	3	5,94	6	6,01	6	5,54	7	6,23
c_{16}	7	6,43	7	6,70	4	6,59	8	6,68	6	6,57	9	7,19
c_{17}	11	7,14	5	7,70	9	7,06	4	7,16	6	7,43	5	7,92
c_{18}	7	7,61	13	8,40	8	7,29	13	7,40	9	8,03	10	8,32
c_{19}	6	7,79	11	8,71	5	7,27	6	7,37	9	8,29	7	8,34
c_{20}	4	7,66	13	8,59	5	6,99	5	7,07	6	8,17	4	7,97
c_{21}	11	7,23	10	8,05	8	6,49	7	6,55	12	7,69	12	7,28
c_{22}	6	6,56	1	7,17	9	5,81	8	5,84	4	6,92	5	6,34
c_{23}	9	5,71	8	6,07	7	5,02	7	5,02	7	5,94	9	5,27
c_{24}	5	4,77	3	4,88	5	4,19	3	4,16	6	4,87	3	4,18
c_{25}	0	3,83	7	3,73	3	3,37	3	3,32	1	3,82	4	3,16
c_{26}	3	2,95	0	2,71	2	2,61	3	2,56	8	2,86	1	2,28
c_{27}	3	2,18	2	1,87	0	1,96	2	1,90	1	2,04	2	1,57
c_{28}	2	1,55	0	1,23	2	1,42	2	1,36	1	1,39	2	1,03
c_{29}	1	1,06	1	0,77	1	0,99	1	0,94	1	0,91	0	0,65
c_{30}	0	0,69	0	0,45	0	0,66	0	0,62	0	0,57	0	0,39
c_{31}	0	0,44	0	0,26	0	0,43	0	0,40	0	0,34	0	0,22
c_{32}	0	0,26	0	0,14	0	0,27	0	0,25	0	0,19	0	0,12
c_{33}	0	0,15	0	0,07	0	0,16	0	0,15	0	0,10	0	0,06
c_{34}	0	0,09	0	0,03	0	0,10	0	0,08	0	0,05	0	0,03
c_{35}	0	0,05	1	0,02	0	0,05	0	0,05	0	0,03	0	0,01
c_{36}	1	0,02	0	0,01	1	0,03	0	0,02	0	0,01	0	0,01

Viene verificato l'accordo dei dati osservati con le previsioni teoriche, mediante test del χ^2 , che eseguiamo per 4 intervalli³:

$$\chi_l^2 = \sum_{j=1}^4 \frac{(O_{jl} - F_{jl})^2}{F_{jl}^2} \quad (9)$$

i cui valori sono riportati in tabella D:

³Gli intervalli analizzati, ora, e dove non specificato diversamente, nei successivi test di χ^2 , sono relativi alle celle 1 – 9, 10 – 18, 19 – 27, 28 – 36, estremi inclusi.

Tabella D

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
χ_l^2	1,74	2,48	0,47	1,16	0,44	0,44	0,06	1,57	0,02	0,05	0,21	0,11

I valori dei χ_l^2 , forniscono gli indicatori statistici per la distribuzione di χ^2 stesso:

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^{12} \chi_l^2 \quad (10)$$

$$s^2(\chi^2) = \frac{1}{11} \sum_{l=1}^{12} (\chi_l^2 - \overline{\chi^2})^2 \quad (11)$$

I valori (10) e (11) ottenuti sono rispettivamente 0.73 e 0.66.

I 12 χ^2 calcolati, sottolineano tutti come la distribuzione sperimentale sia in ottimo accordo con quella prevista da una opportuna gaussiana, tale accordo nella metà dei casi è addirittura sospetto.

Calcoliamo i parametri β_{1l} e β_{2l} della gaussiana, rispettivamente per verificarne la simmetria e lo *schiacciamento*. I parametri sono definiti come

$$\beta_{1l} = \sum_{j=1}^C \frac{(x_j - \overline{x}_l)^3}{C(s_l^2)^3} \quad (12)$$

$$\beta_{2l} = \sum_{j=1}^C \frac{(x_j - \overline{x}_l)^4}{C(s_l^2)^4} \quad (13)$$

Di seguito è riportato quanto calcolato:

Tabella E

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
β_{1l}	-0,43	-0,55	-0,25	-0,47	-0,37	-0,36	-0,33	-0,68	-0,19	-0,21	-0,48	-0,46
β_{2l}	0,35	0,48	0,17	0,39	0,27	0,27	0,24	0,63	0,12	0,13	0,40	0,37

La statistica dimostra che se $b_{1l} = 0$, la distribuzione è simmetrica, altrimenti è asimmetrica a destra o a sinistra, rispettivamente nei casi in cui $b_{1l} > 0$ o $b_{1l} < 0$.

Analogamente, se $b_{2l} = 3$ la distribuzione è normale, altrimenti è più o meno schiacciata di quella teorica, a seconda che sia $b_{2l} < 3$ o $b_{2l} > 3$ rispettivamente. La verifica è immediata in tabella E: le distribuzioni sono tutte asimmetriche a sinistra e più schiacciate rispetto a quelle previste.

Questo significa che l'usura dello strumento ha fatto sì che alcuni chiodini prediligono una direzione quando una sferetta li urta.

2.2 Distribuzione binomiale

I valori previsti da una distribuzione binomiale sono dati dalla relazione

$$f_j = Np_j \quad (14)$$

essendo

$$p_j = \binom{41}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{36-j} = \binom{36}{j} \frac{1}{2^{36}} \quad (15)$$

la probabilità che una sferetta cada nella j -esima cella. Di seguito sono riportati i valori sperimentali e quelli previsti dalla distribuzione di Bernoulli:

Tabella F

c_j	o_{j1}	o_{j2}	o_{j3}	o_{j4}	o_{j5}	o_{j6}	o_{j7}	o_{j8}	o_{j9}	o_{j10}	o_{j11}	o_{j12}	f_j
c_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,00
c_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,00
c_4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0,00
c_7	0	0	3	0	0	0	1	2	0	0	0	1	0,01
c_8	0	2	0	0	1	1	1	1	3	1	1	2	0,04
c_9	1	0	1	0	2	1	0	0	2	1	0	0	0,13
c_{10}	5	4	2	2	0	1	1	0	4	4	2	2	0,36
c_{11}	0	2	0	2	1	2	3	0	2	3	2	3	0,85
c_{12}	4	4	3	4	1	2	2	2	4	3	3	3	1,77
c_{13}	6	3	4	2	1	5	6	6	2	1	3	1	3,26
c_{14}	4	5	3	4	6	3	3	1	8	4	2	5	5,36
c_{15}	10	9	4	8	6	6	4	3	3	6	6	7	7,86
c_{16}	5	6	8	6	4	4	7	7	4	8	6	9	10,32
c_{17}	4	8	7	9	10	7	11	5	9	4	6	5	12,14
c_{18}	10	5	10	8	8	4	7	13	8	13	9	10	12,81
c_{19}	9	18	11	8	14	14	6	11	5	6	9	7	12,14
c_{20}	10	6	7	11	8	9	4	13	5	5	6	4	10,32
c_{21}	6	3	8	5	3	12	11	10	8	7	12	12	7,86
c_{22}	9	6	5	5	3	6	6	1	9	8	4	5	5,36
c_{23}	2	5	7	4	5	9	9	8	7	7	7	9	3,26
c_{24}	1	7	3	5	7	3	5	3	5	3	6	3	1,77
c_{25}	2	0	4	5	5	2	0	7	3	3	1	4	0,85
c_{26}	3	0	2	4	2	1	3	0	2	3	8	1	0,36
c_{27}	1	0	1	0	3	1	3	2	0	2	1	2	0,13
c_{28}	5	2	1	2	2	0	2	0	2	2	1	2	0,04
c_{29}	0	1	0	1	2	0	1	1	1	1	1	0	0,01
c_{30}	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0,00
c_{31}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_{32}	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_{33}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_{34}	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00
c_{35}	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0,00
c_{36}	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0,00

Viene verificato l'accordo tra le 2 distribuzioni mediante test del χ^2 eseguito al contrario della precedente verifica, sugli intervalli maggiori relativi alle celle 1-18 e 19-36 estremi inclusi, i cui valori sono riportati in tabella G:

Tabella G

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
χ^2	0,03	0,04	0,06	0,09	0,20	0,26	0,07	0,20	0,03	0,02	0,17	0,04

I valori (10) e (11) ottenuti sono rispettivamente 0.10 e 0.007.

I 12 χ^2 calcolati, sottolineano tutti come la distribuzione sperimentale sia in ottimo accordo con quella prevista da una binomiale, tale accordo nella maggioranza dei casi è addirittura sospetto.

2.3 Distribuzione di Poisson

I valori previsti da una distribuzione di Poisson sono dati dalla relazione

$$f_{jl} = N e^{-\mu_l} \frac{\mu_l^{x_j}}{x_j!} \quad (16)$$

essendo $\mu_l = \bar{x}_l$, ovvero il valore medio. I valori sperimentali e quelli previsti dalla (16) sono riportati in tabella H:

Tabella H

c_j	o_{j1}	f_{j1}	o_{j2}	f_{j2}	o_{j3}	f_{j3}	o_{j4}	f_{j4}	o_{j5}	f_{j5}	o_{j6}	f_{j6}
c_1	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
c_2	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
c_3	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	0,00
c_4	0	0,00	0	0,01	1	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
c_5	0	0,02	0	0,02	0	0,02	0	0,01	0	0,01	0	0,01
c_6	0	0,06	0	0,07	1	0,06	0	0,03	0	0,02	1	0,04
c_7	0	0,15	0	0,17	3	0,15	0	0,09	0	0,06	0	0,12
c_8	0	0,33	2	0,39	0	0,34	0	0,21	1	0,14	1	0,28
c_9	1	0,68	0	0,79	1	0,68	0	0,44	2	0,32	1	0,57
c_{10}	5	1,25	4	1,42	2	1,25	2	0,84	0	0,63	1	1,07
c_{11}	0	2,08	2	2,33	0	2,09	2	1,47	1	1,13	2	1,82
c_{12}	4	3,18	4	3,51	3	3,19	4	2,35	1	1,87	2	2,83
c_{13}	6	4,48	3	4,87	4	4,50	2	3,47	1	2,84	5	4,07
c_{14}	4	5,87	5	6,28	3	5,89	4	4,75	6	4,01	3	5,42
c_{15}	10	7,18	9	7,56	4	7,20	8	6,07	6	5,29	6	6,75
c_{16}	5	8,23	6	8,53	8	8,24	6	7,28	4	6,54	4	7,87
c_{17}	4	8,88	8	9,05	7	8,89	9	8,21	10	7,61	7	8,65
c_{18}	10	9,05	5	9,08	10	9,05	8	8,75	8	8,36	4	8,97
c_{19}	9	8,74	18	8,62	11	8,73	8	8,83	14	8,70	14	8,81
c_{20}	10	8,01	6	7,78	7	8,00	11	8,47	8	8,61	9	8,23
c_{21}	6	7,00	3	6,69	8	6,99	5	7,74	3	8,11	12	7,31
c_{22}	9	5,83	6	5,49	5	5,82	5	6,74	3	7,29	6	6,21
c_{23}	2	4,65	5	4,31	7	4,64	4	5,62	5	6,27	9	5,04
c_{24}	1	3,55	7	3,24	3	3,54	5	4,49	7	5,17	3	3,92
c_{25}	2	2,61	0	2,34	4	2,60	5	3,45	5	4,09	2	2,93
c_{26}	3	1,84	0	1,62	2	1,83	4	2,54	2	3,11	1	2,10
c_{27}	1	1,25	0	1,09	1	1,24	0	1,81	3	2,28	1	1,45
c_{28}	5	0,82	2	0,70	1	0,81	2	1,24	2	1,61	0	0,97
c_{29}	0	0,52	1	0,44	0	0,51	1	0,82	2	1,10	0	0,62
c_{30}	0	0,32	0	0,26	0	0,31	1	0,52	0	0,72	1	0,39
c_{31}	0	0,19	0	0,15	0	0,19	0	0,32	1	0,46	0	0,23
c_{32}	0	0,11	0	0,09	0	0,11	0	0,19	2	0,29	0	0,14
c_{33}	0	0,06	0	0,05	0	0,06	1	0,11	0	0,17	0	0,08
c_{34}	0	0,03	1	0,02	1	0,03	0	0,06	0	0,10	0	0,04
c_{35}	0	0,02	0	0,01	0	0,02	0	0,03	0	0,06	1	0,02
c_{36}	0	0,01	0	0,01	0	0,01	0	0,02	0	0,03	0	0,01

c_j	o_{j7}	f_{j7}	o_{j8}	f_{j8}	o_{j9}	f_{j9}	o_{j10}	f_{j10}	o_{j11}	f_{j11}	o_{j12}	f_{j12}
c_1	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	0,00	0	0,00	0	0,00
c_2	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
c_3	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
c_4	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
c_5	0	0,01	0	0,01	0	0,02	0	0,02	0	0,01	0	0,02
c_6	0	0,03	0	0,03	0	0,05	1	0,05	1	0,03	0	0,05
c_7	1	0,09	2	0,08	0	0,14	0	0,14	0	0,09	1	0,13
c_8	1	0,22	1	0,20	3	0,32	1	0,32	1	0,20	2	0,30
c_9	0	0,46	0	0,43	2	0,66	1	0,66	0	0,44	0	0,61
c_{10}	1	0,88	0	0,83	4	1,21	4	1,22	2	0,84	2	1,13
c_{11}	3	1,53	0	1,44	2	2,02	3	2,04	2	1,46	3	1,91
c_{12}	2	2,44	2	2,31	4	3,10	3	3,12	3	2,34	3	2,95
c_{13}	6	3,58	6	3,42	2	4,39	1	4,42	3	3,45	1	4,22
c_{14}	3	4,88	1	4,70	8	5,78	4	5,81	2	4,73	5	5,58
c_{15}	4	6,20	3	6,02	3	7,09	6	7,12	6	6,06	7	6,91
c_{16}	7	7,40	7	7,23	4	8,16	8	8,18	6	7,27	9	8,01
c_{17}	11	8,30	5	8,17	9	8,84	4	8,85	6	8,20	5	8,74
c_{18}	7	8,80	13	8,73	8	9,04	13	9,04	9	8,74	10	9,00
c_{19}	6	8,84	11	8,83	5	8,76	6	8,75	9	8,83	7	8,79
c_{20}	4	8,43	13	8,48	5	8,06	5	8,05	6	8,47	4	8,15
c_{21}	11	7,66	10	7,76	8	7,07	7	7,05	12	7,74	12	7,20
c_{22}	6	6,64	1	6,78	9	5,91	8	5,89	4	6,75	5	6,07
c_{23}	9	5,51	8	5,67	7	4,73	7	4,71	7	5,63	9	4,90
c_{24}	5	4,38	3	4,54	5	3,63	3	3,61	6	4,51	3	3,79
c_{25}	0	3,34	7	3,49	3	2,67	3	2,65	1	3,46	4	2,81
c_{26}	3	2,45	0	2,58	2	1,89	3	1,88	8	2,55	1	2,00
c_{27}	3	1,73	2	1,84	0	1,29	2	1,28	1	1,81	2	1,38
c_{28}	2	1,18	0	1,26	2	0,85	2	0,84	1	1,24	2	0,91
c_{29}	1	0,78	1	0,84	1	0,54	1	0,53	1	0,82	0	0,58
c_{30}	0	0,49	0	0,54	0	0,33	0	0,33	0	0,53	0	0,36
c_{31}	0	0,30	0	0,33	0	0,20	0	0,19	0	0,33	0	0,22
c_{32}	0	0,18	0	0,20	0	0,11	0	0,11	0	0,20	0	0,13
c_{33}	0	0,10	0	0,12	0	0,06	0	0,06	0	0,11	0	0,07
c_{34}	0	0,06	0	0,07	0	0,03	0	0,03	0	0,06	0	0,04
c_{35}	0	0,03	1	0,04	0	0,02	0	0,02	0	0,04	0	0,02
c_{36}	1	0,02	0	0,02	1	0,01	0	0,01	0	0,02	0	0,01

Viene verificato l'accordo tra le 2 distribuzioni mediante test del χ^2 , i cui valori sono riportati in tabella I:

Tabella I

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
χ^2	4,09	2,08	9,26	5,00	11,33	3,10	2,10	1,22	7,53	3,49	0,28	1,09

I valori (10) e (11) ottenuti sono rispettivamente 4.21 e 12.05.

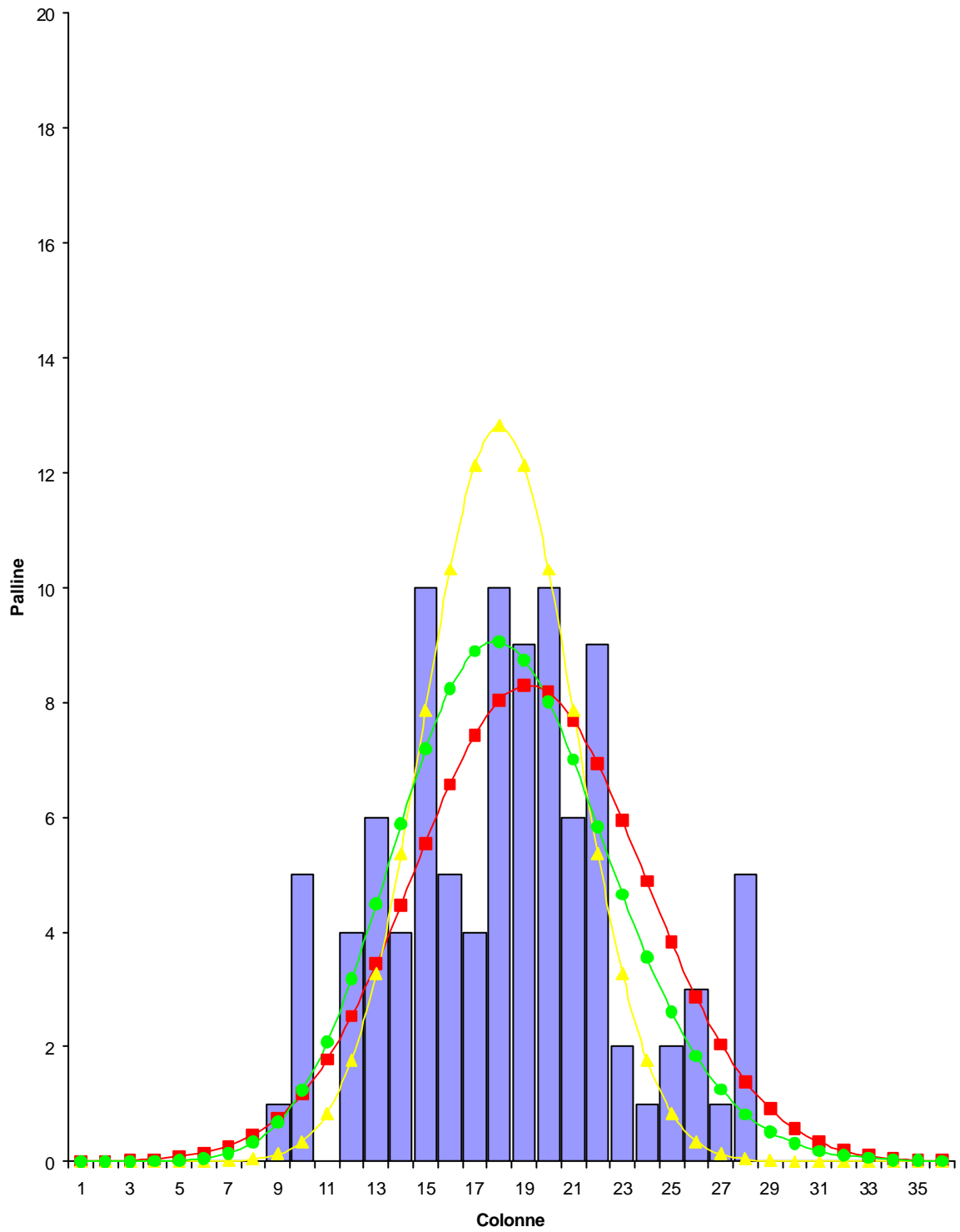
I 12 χ^2 calcolati, sottolineano tutti come la distribuzione sperimentale sia in ottimo accordo con quella prevista da una opportuna poissoniana, tale accordo è meno evidente in soli 4 casi.

2.4 Riepilogo

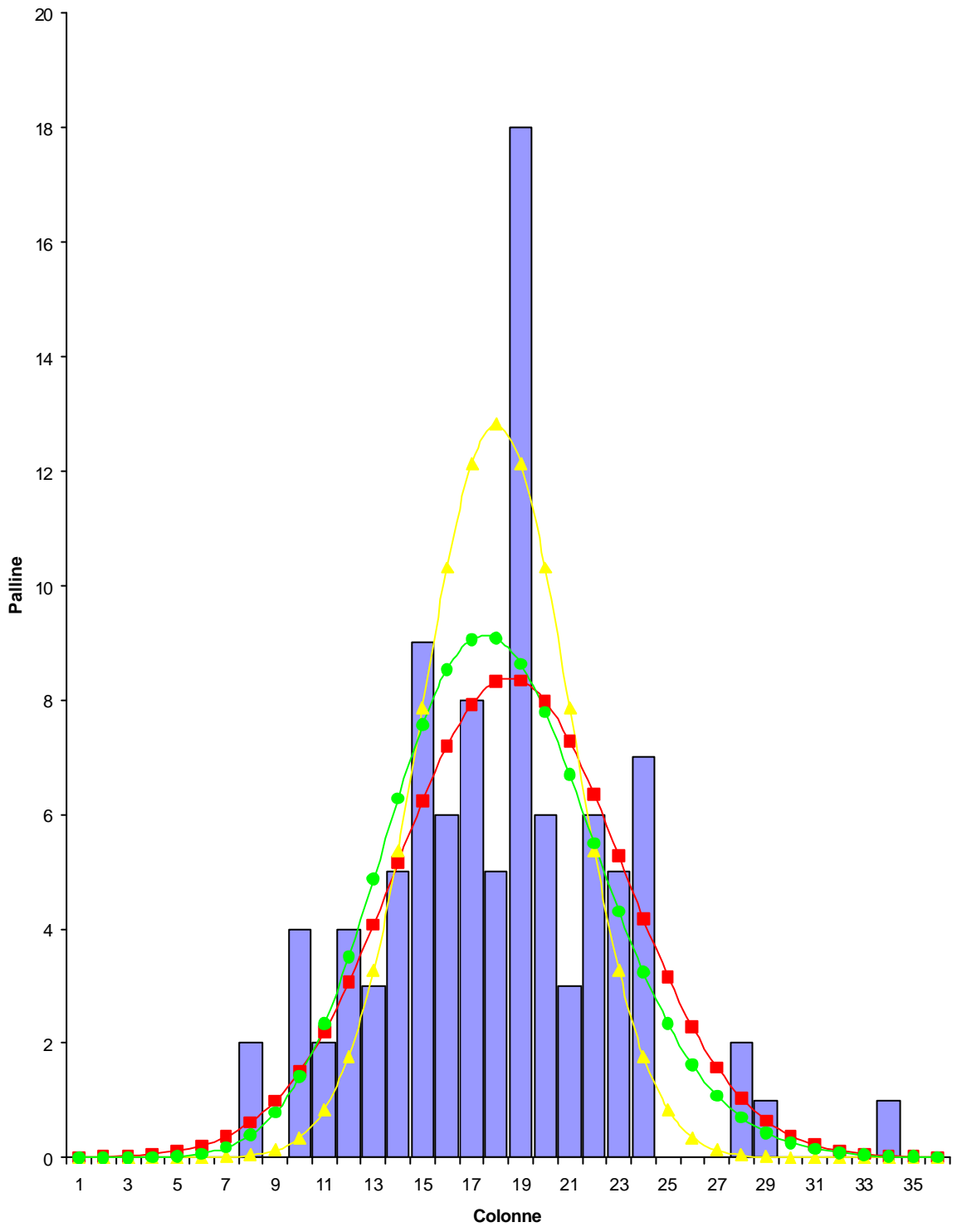
Sono riportati i grafici dell'istogramma sperimentale e delle 3 distribuzioni previste⁴, al fine di mettere evidenza quanto analizzato.

⁴I colori rosso, giallo e verde, sono rispettivamente assegnati alla distribuzione di Gauss, alla distribuzione di Bernoulli, alla distribuzione di Poisson.

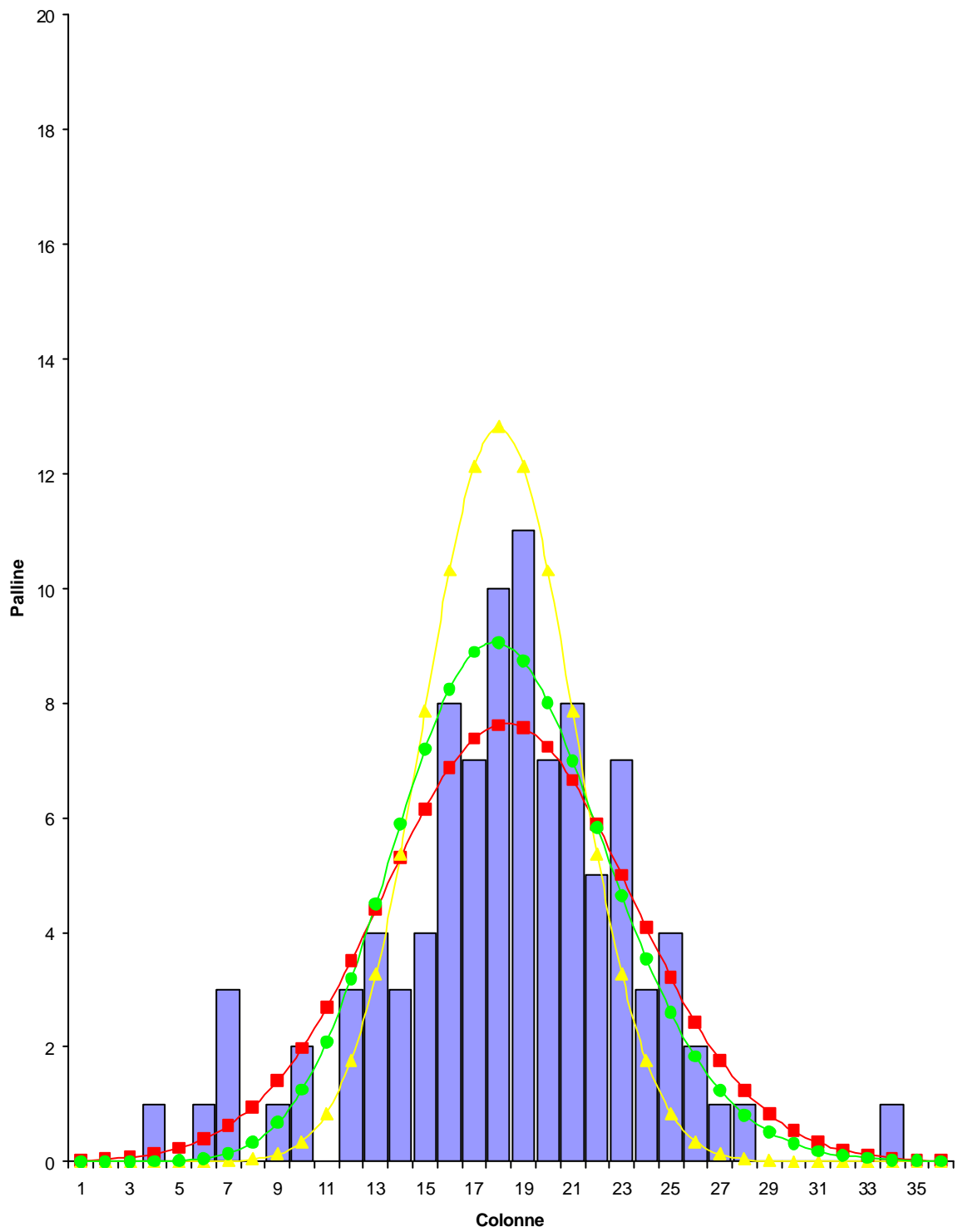
Lancio n.1



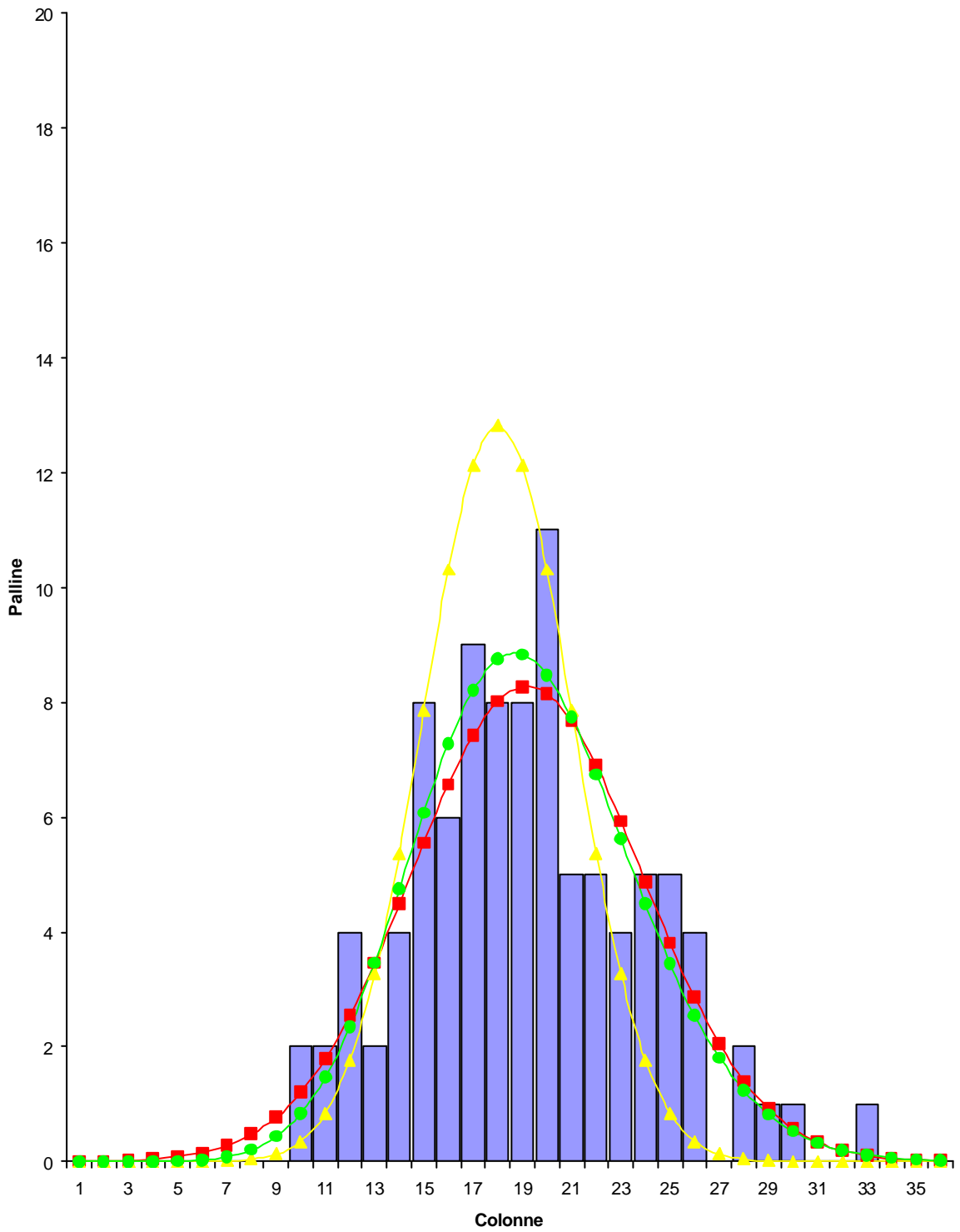
Lancio n.2



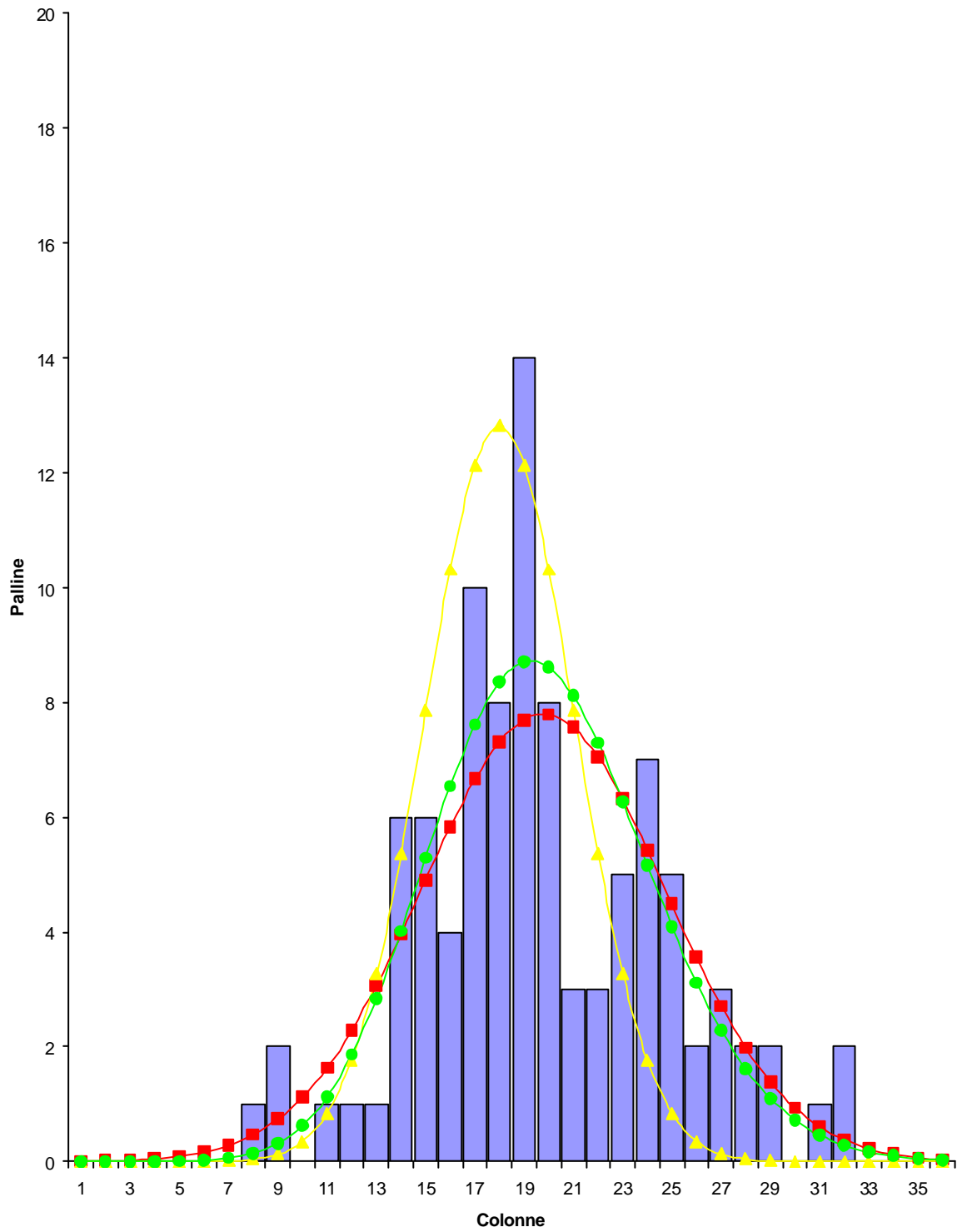
Lancio n.3



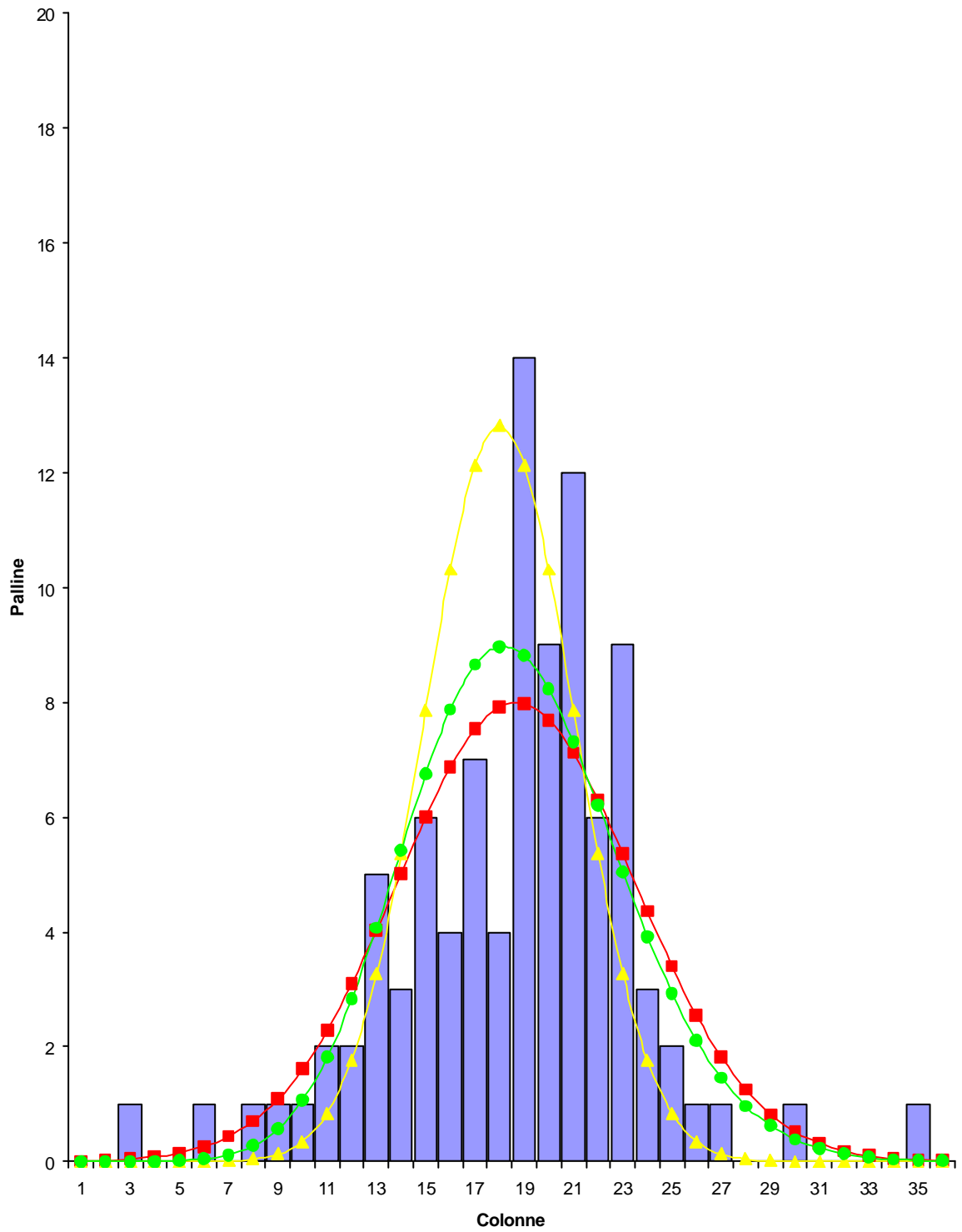
Lancio n.4



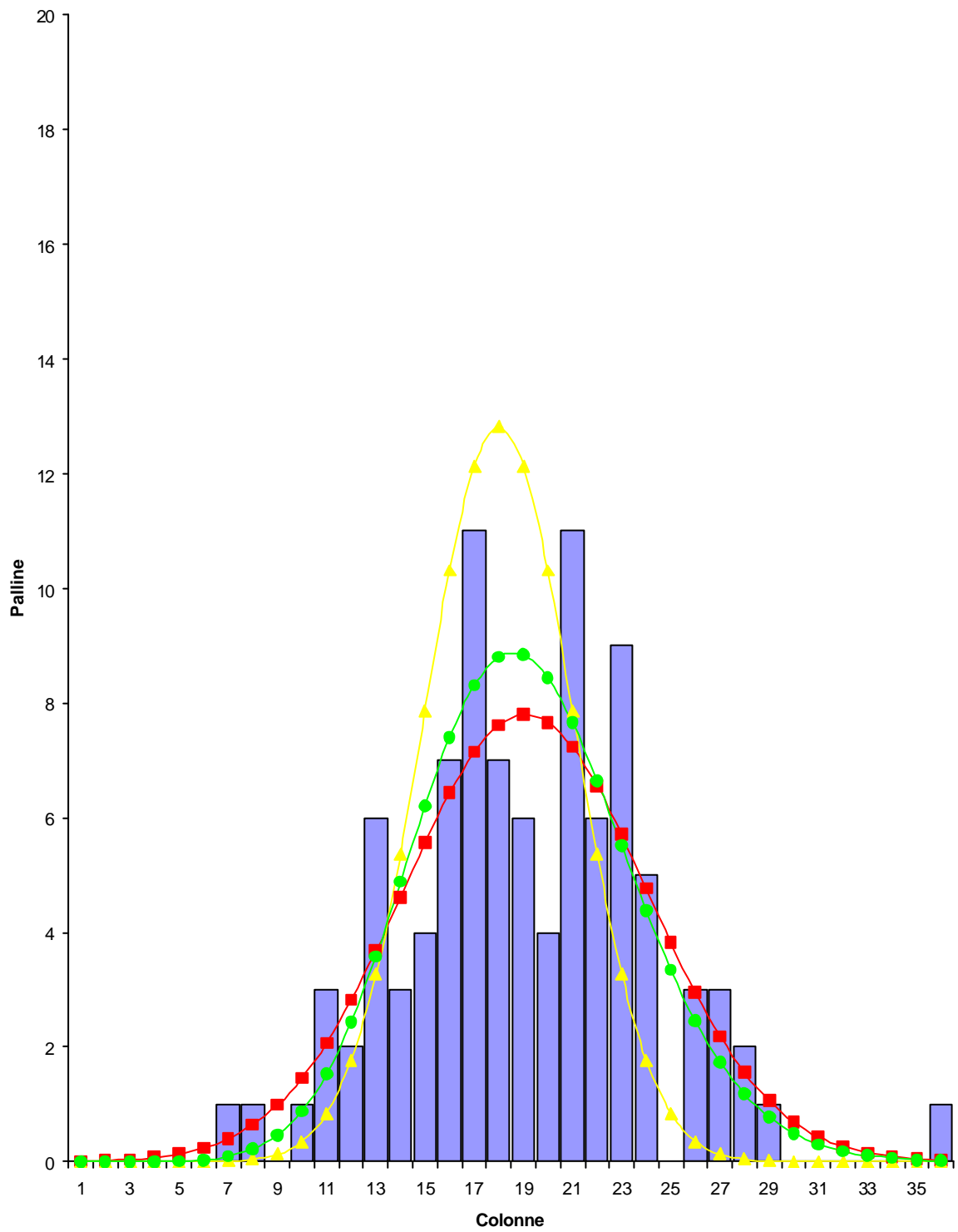
Lancio n.5



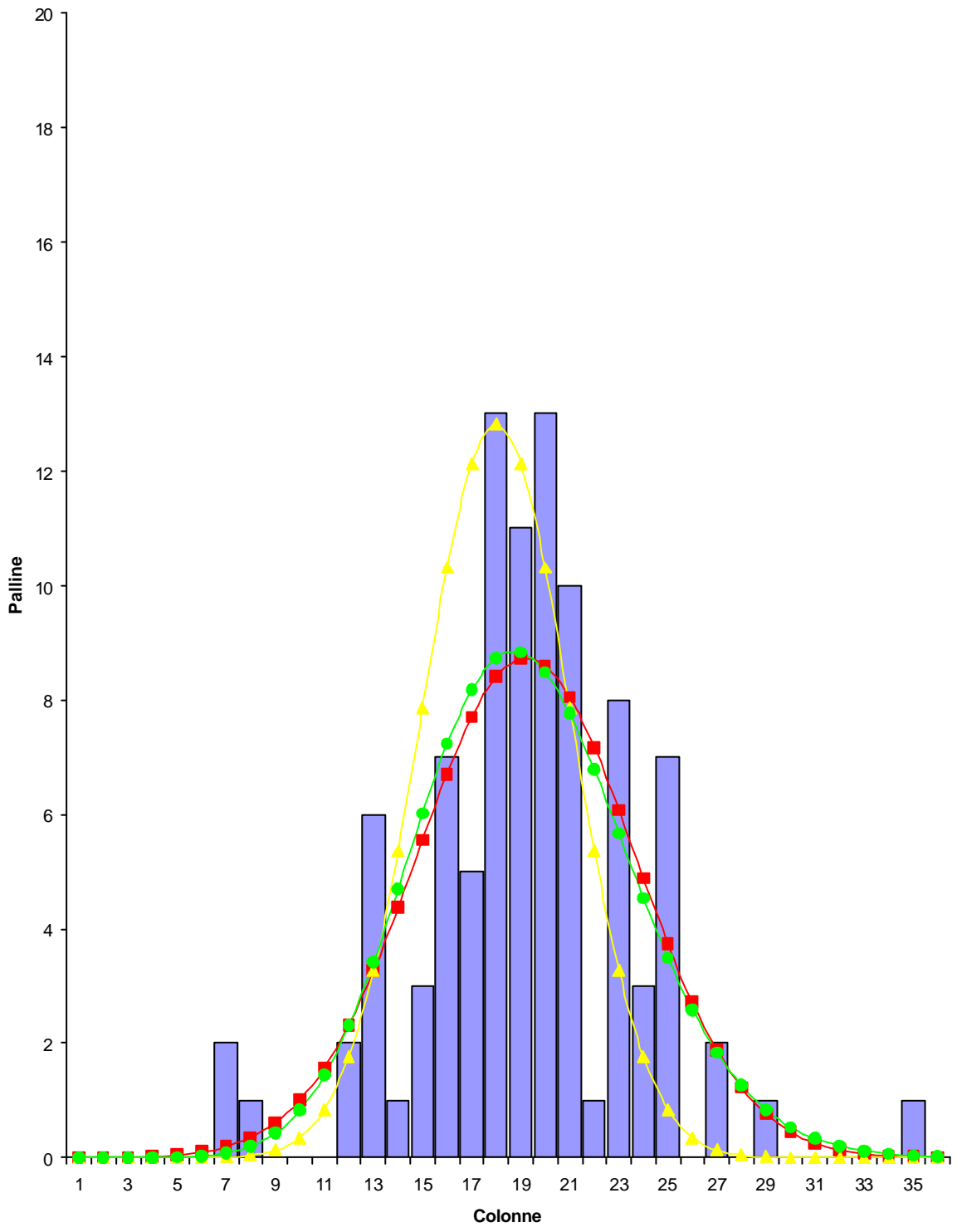
Lancio n.6



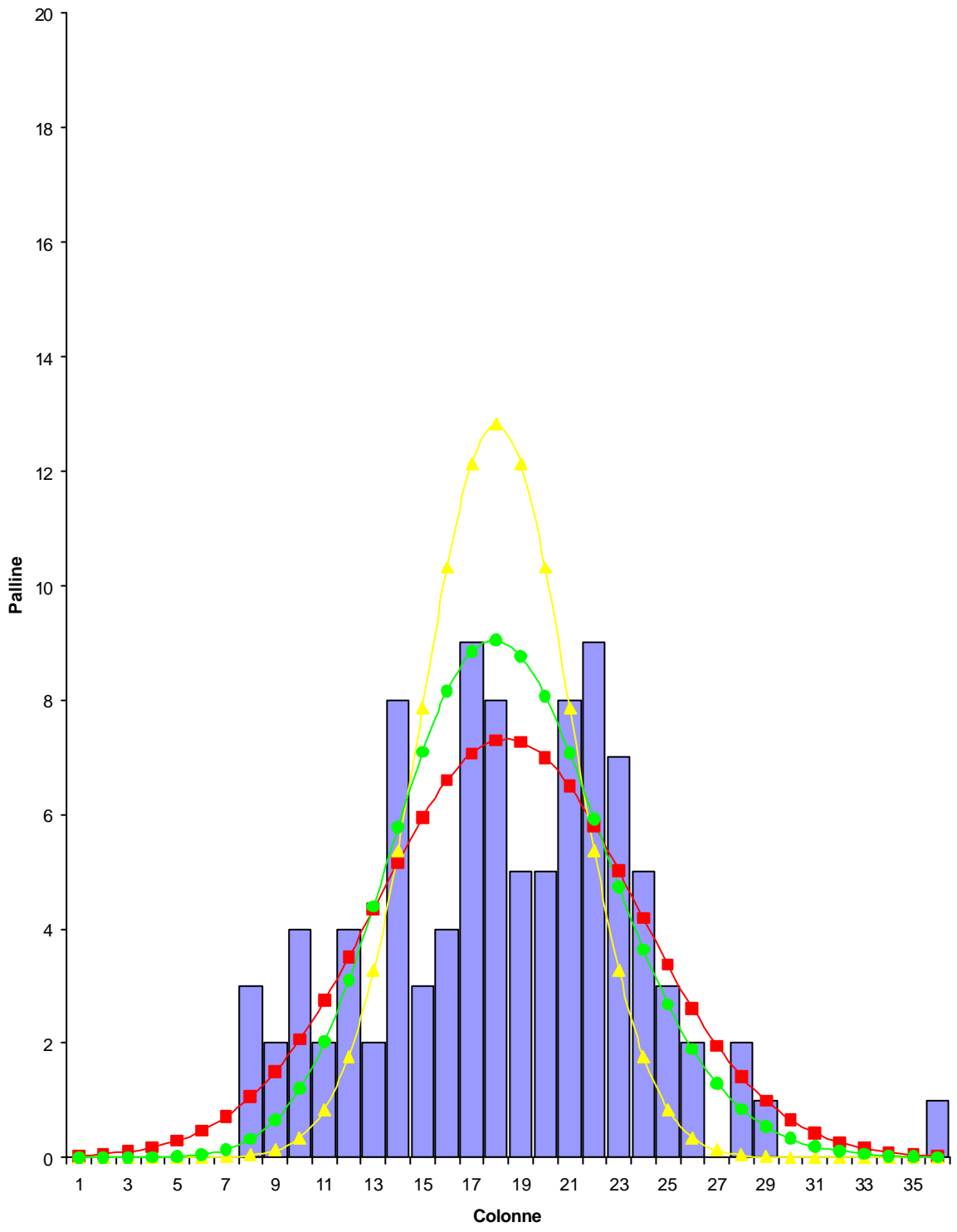
Lancio n.7



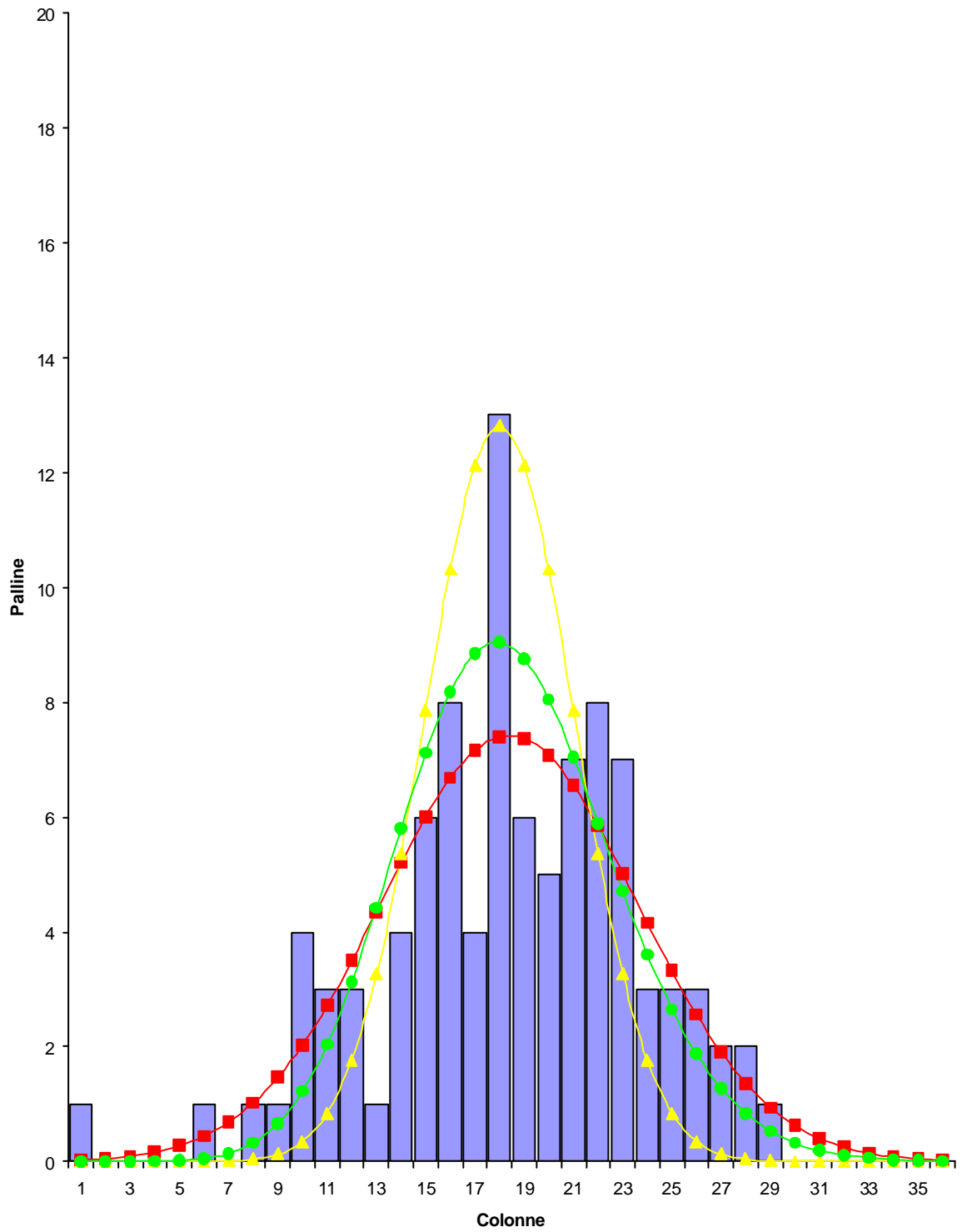
Lancio n.8



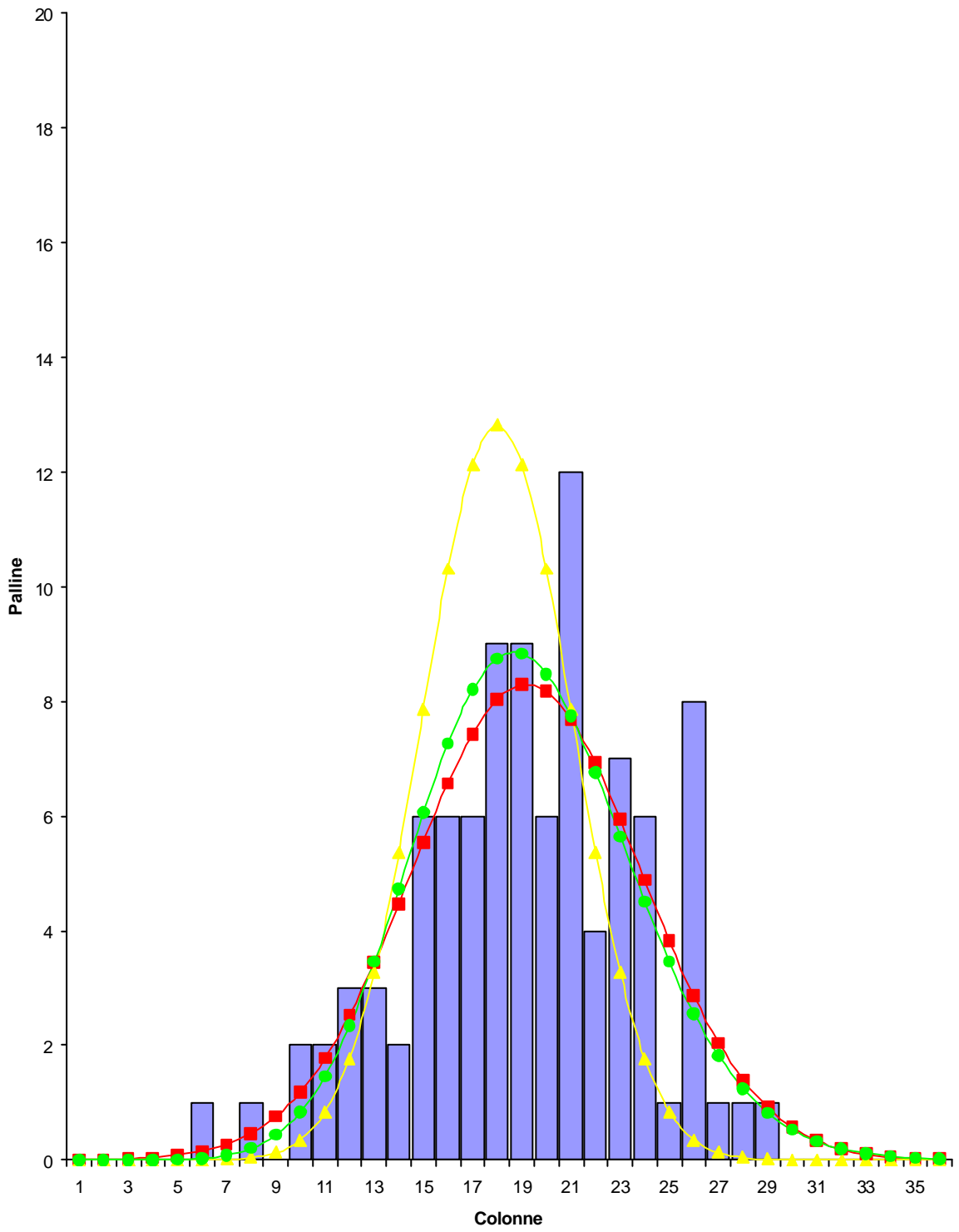
Lancio n.9



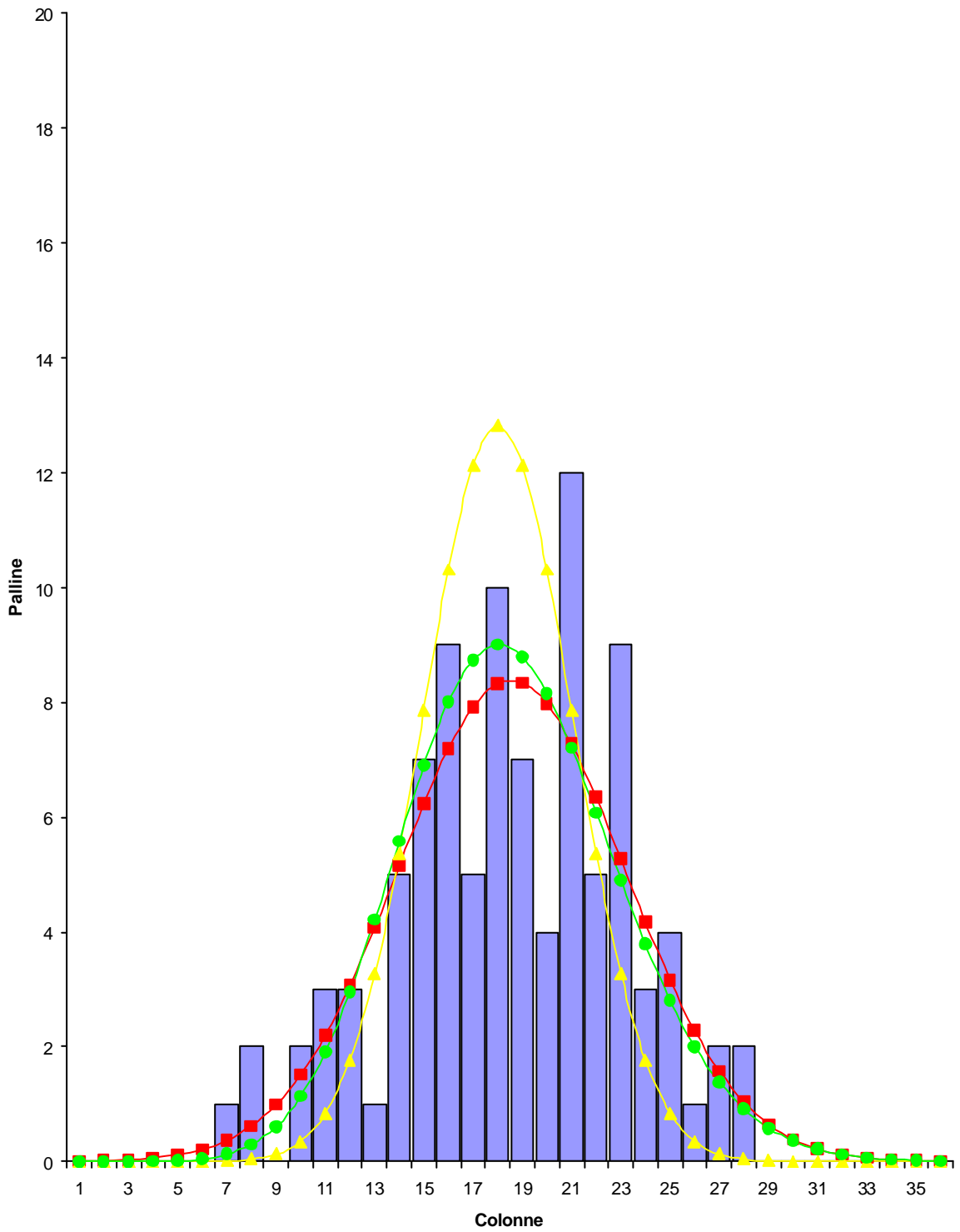
Lancio n.10



Lancio n.11



Lancio n.12



3 Distribuzioni sperimentali e distribuzioni teoriche per le somme

Quanto fatto in precedenza può essere ripetuto per la distribuzione delle somme per cella delle sferette raccolte in ognuna di esse.

In tabella L sono riportati tali valori, insieme a quelli previsti dalle 3 distribuzioni analizzate, calcolati ponendo $N = 12 \cdot 97$ nelle relazioni (8), (14) e (16):

Tabella L

c_j	o_j	G_j	B_j	P_j
c_1	1	0,12	0,00	0,00
c_2	0	0,24	0,00	0,00
c_3	1	0,48	0,00	0,01
c_4	1	0,92	0,00	0,04
c_5	0	1,69	0,01	0,16
c_6	4	2,97	0,03	0,50
c_7	7	5,02	0,14	1,34
c_8	13	8,11	0,51	3,14
c_9	8	12,55	1,59	6,54
c_{10}	27	18,63	4,31	12,28
c_{11}	20	26,50	10,18	20,95
c_{12}	35	36,11	21,20	32,77
c_{13}	40	47,16	39,14	47,32
c_{14}	48	59,03	64,30	63,44
c_{15}	72	70,81	94,31	79,38
c_{16}	74	81,39	123,78	93,12
c_{17}	85	89,65	145,63	102,82
c_{18}	105	94,63	153,72	107,22
c_{19}	118	95,72	145,63	105,92
c_{20}	88	92,79	123,78	99,40
c_{21}	97	86,20	94,31	88,85
c_{22}	67	76,74	64,30	75,80
c_{23}	79	65,47	39,14	61,86
c_{24}	51	53,52	21,20	48,38
c_{25}	36	41,93	10,18	36,33
c_{26}	29	31,48	4,31	26,22
c_{27}	16	22,65	1,59	18,23
c_{28}	21	15,62	0,51	12,22
c_{29}	9	10,32	0,14	7,91
c_{30}	2	6,53	0,03	4,95
c_{31}	1	3,96	0,01	3,00
c_{32}	2	2,31	0,00	1,76
c_{33}	1	1,28	0,00	1,00
c_{34}	2	0,69	0,00	0,55
c_{35}	2	0,35	0,00	0,30
c_{36}	2	0,17	0,00	0,15
Tot.	1164	1164	1164	1164

Viene verificato l'accordo dei dati osservati con ciascuna distribuzione teorica, mediante test del χ^2 , per i quali sono stati ottenuti i seguenti valori⁵:

Tabella M

χ_G^2	χ_B^2	χ_P^2
0,01	0,09	4,05

Se ne deduce subito che l'accordo della distribuzione sperimentale con la

⁵Gli intervalli scelti coincidono con quelli precedenti per le rispettive distribuzioni.

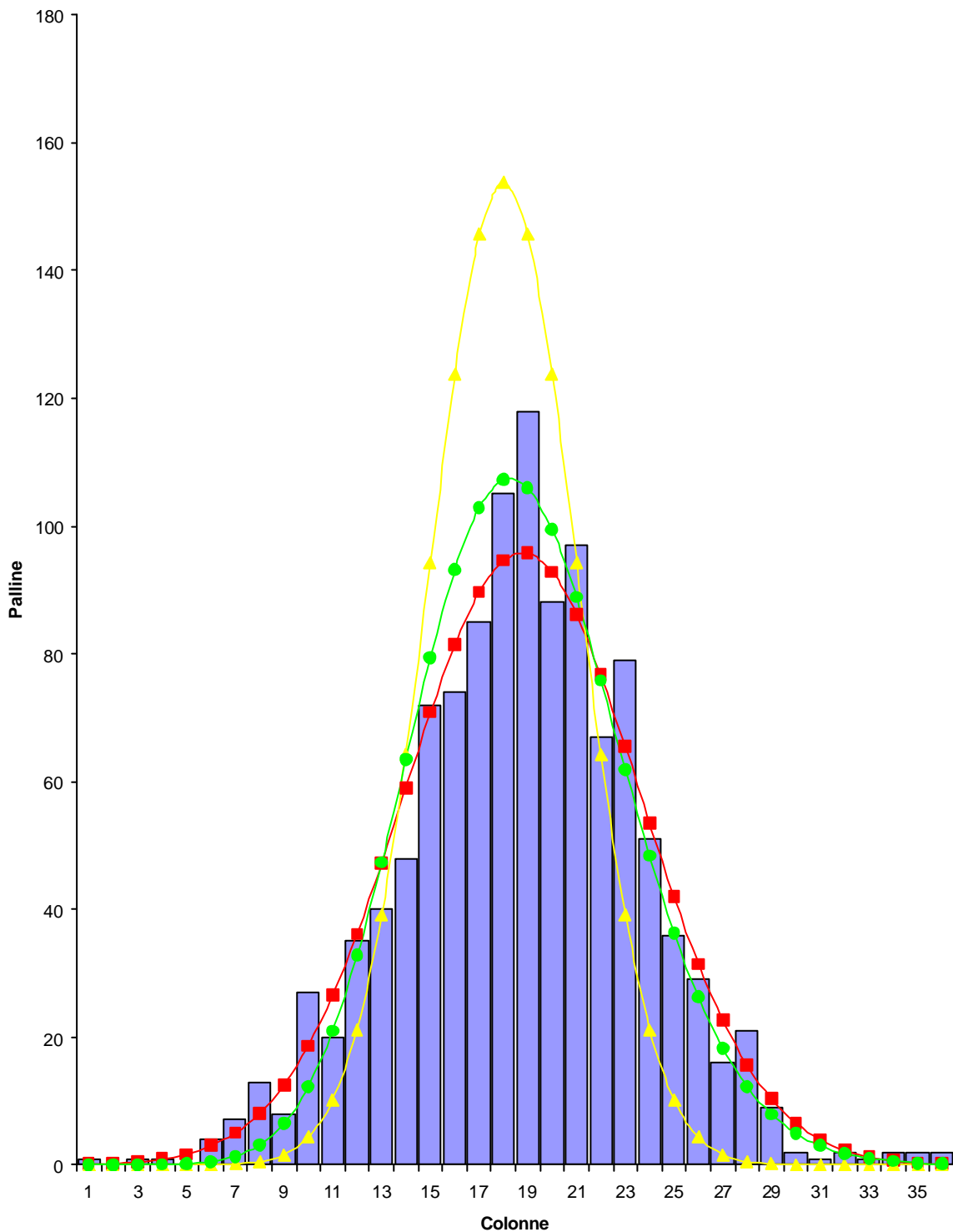
distribuzione di Poisson è praticamente perfetto, e quest'ultima distribuzione è quella che meglio approssima quanto ottenuto sperimentando.

I parametri β_1 e β_2 della distribuzione gaussiana, ottenuti dalla (12) e dalla (13), sono $\beta_1 = 7.24$ e $\beta_2 = 24.79$ per cui la distribuzione sperimentale è asimmetrica a destra e ben meno schiacciata.

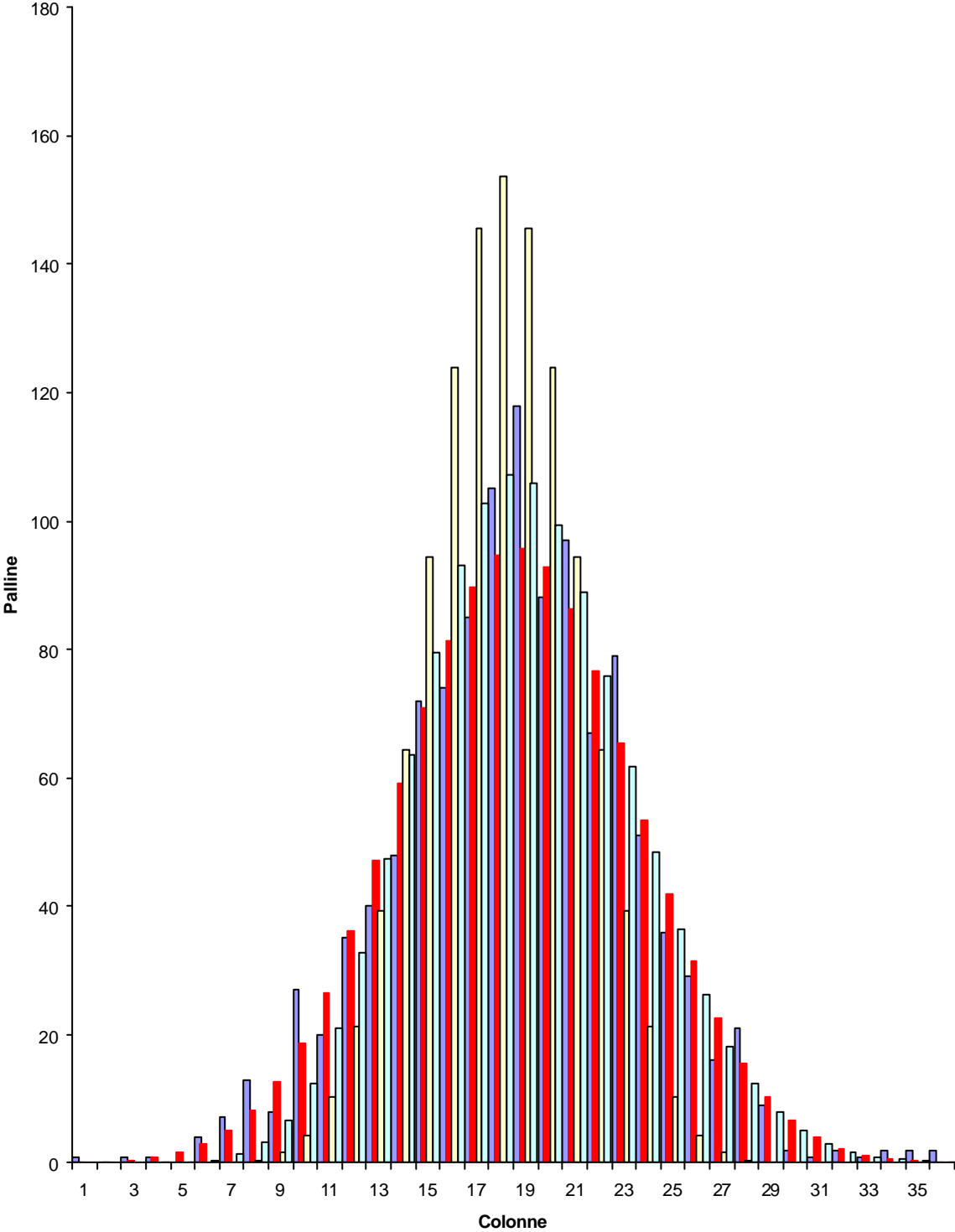
Sono riportati i grafici dell'istogramma sperimentale e delle 3 distribuzioni previste⁶, al fine di mettere evidenza quanto analizzato.

⁶I colori rosso, giallo e verde, sono rispettivamente assegnati alla distribuzione di Gauss, alla distribuzione di Bernoulli, alla distribuzione di Poisson.

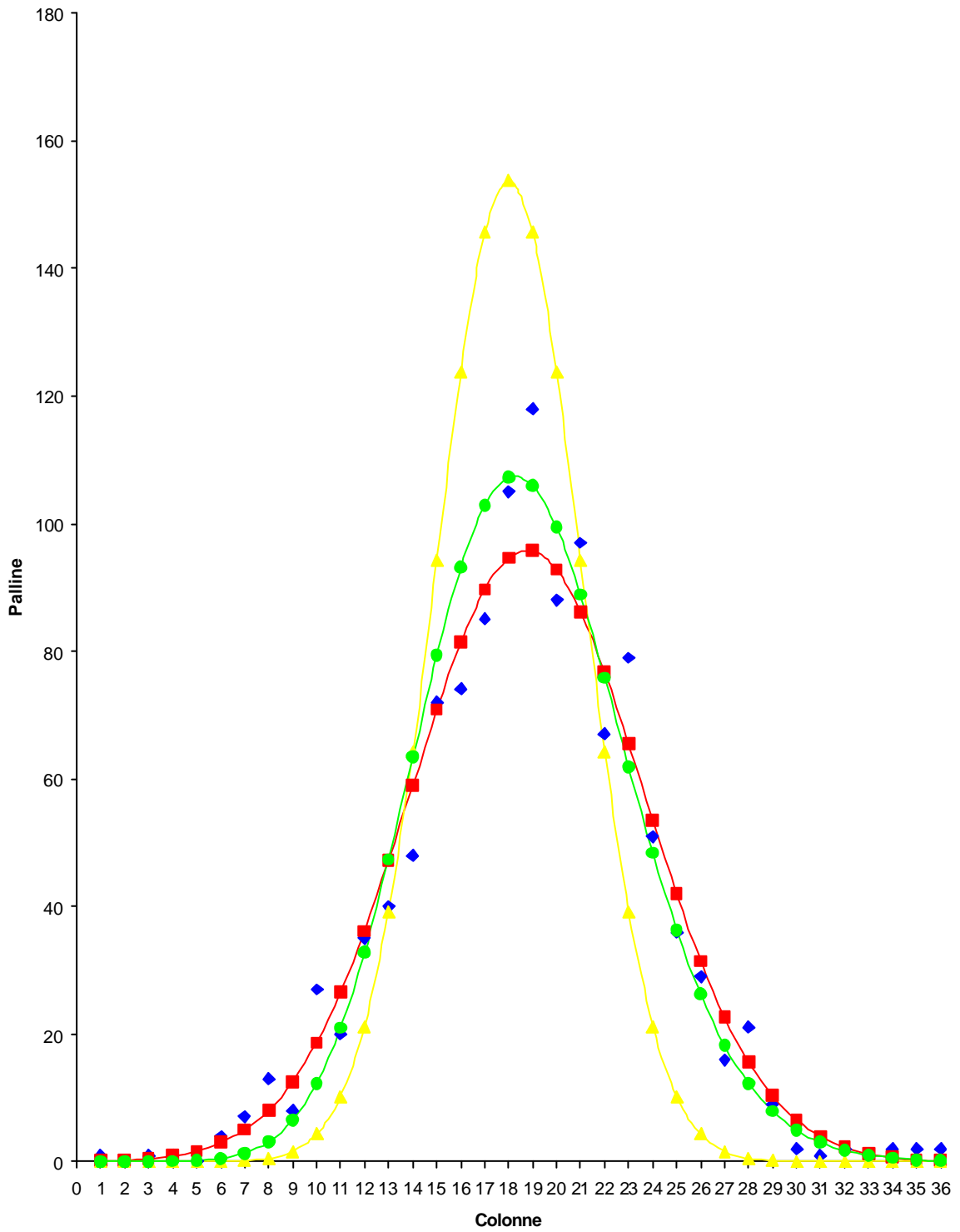
Distribuzione delle somme



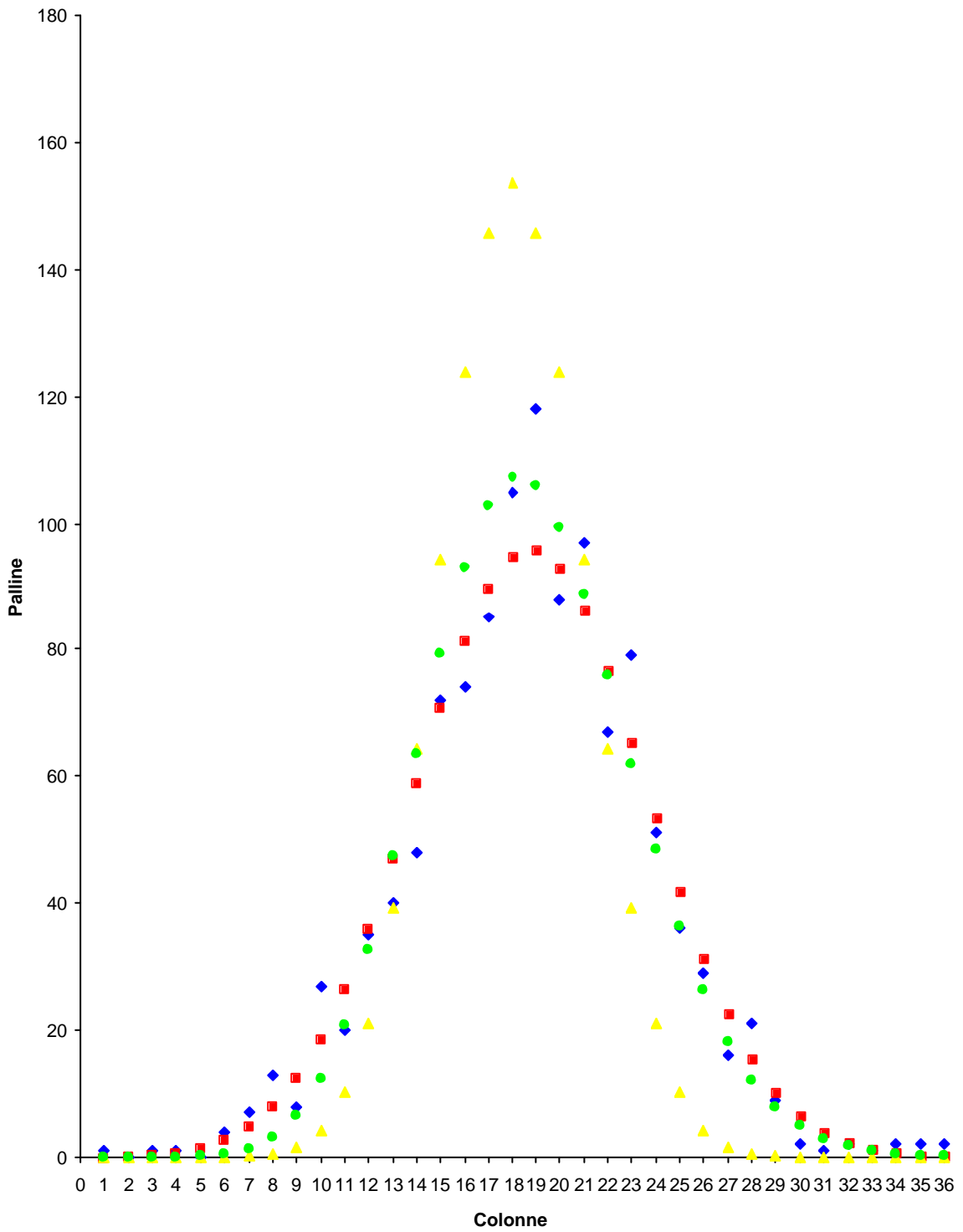
Distribuzione delle somme



Distribuzione delle somme



Distribuzione delle somme



4 Conclusioni

E' stato dimostrato che le distribuzioni statistiche teoriche della gaussiana e della binomiale non approssimano bene la distribuzione sperimentale di sferette per una Quinconce di Galton.

E' stato verificato come, tanto per le distribuzioni dei singoli lanci, salvo qualche eccezione, tanto per la distribuzione delle somme, la distribuzione di Poisson risulta la migliore approssimazione sotto tutti i punti di vista, come confermato eccellentemente dal test del χ^2 .

Quanto ottenuto dai parametri di asimmetria e di schiacciamento esprime anche che l'apparato utilizzato non è perfetto, come invece richiedevano le ipotesi iniziali che abbiamo fatto prima dello studio delle distribuzioni teoriche.

5 Bibliografia

- A.Foti e C.Gianino** - *Elementi di analisi dei dati sperimentali*, Liguori, Napoli.
W.Maraschini e M.Palma - *Format: probabilità e statistica*, Paravia, Torino.
E.Perucca - *Fisica Generale e sperimentale*, UTET, Torino.
R.Ricamo - *Guida alle sperimentazioni di Fisica*, Ambrosiana, Milano.
J.R. Taylor - *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli, Bologna.
F.Tyler - *A Laboratory manual of Physics*, E.Arnoold, London.
F.Liello, M.Severi - *Giornale di Fisica*, Vol.XIX, 1978.