

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CATANIA

Dipartimento di Scienze MM FF NN

Corso di Laurea di primo livello in Fisica

QUINCONCE DI GALTON

**Distribuzioni sperimentali
a confronto con distribuzioni teoriche**

Laboratorio di Fisica I

Anno Accademico 2004/2005

Corsaro Enrico Maria Nicola

Matricola N° 665/000327

1 – INTRODUZIONE

Il termine **Quinconce** proviene dal latino “quinque”, ovvero cinque: questo perché la macchina è realizzata da file di pioli sfalsate fra loro e disposte in successione una sotto l'altra.



Sistemate 3 file di pioli di seguito si può difatti notare chiaramente come la disposizione dei pioli abbia la stessa disposizione dei punti che rappresentano il numero 5 sulla faccia di un dado, come mostra la figura a lato.



Il nome aggiuntivo **Galton** deriva dall'inventore della macchina, Sir **Francis Galton** (1822-1911), il quale, come riportato nella sua stessa opera *Natural Inheritance*, la utilizzò per mostrare come si potesse generare sperimentalmente una curva normale (la curva della distribuzione normale).

2 – DESCRIZIONE

Il macchinario presente in laboratorio dispone di un numero adeguato di sferette per effettuare i lanci (circa 100) ed è principalmente costituito da uno specifico apparato che verrà illustrato di seguito (la figura in basso a destra non rappresenta la Quinconce di Galton presente in laboratorio e la sua struttura è difatti un poco differente; si tratta pertanto di una fotografia che vuole solo rendere l'idea di come si presenti ciò che ci si accinge a descrivere).

Vi è un particolare piano, montato su di una struttura che permette di tenerlo inclinato di un certo angolo (in modo da permettere alle sferette di cadere sotto l'effetto della forza di gravità), e in cui sono opportunamente disposte 41 righe di pioli in acciaio, sfalsate fra loro come detto in precedenza secondo il principio della quinconce.

Il piano è coperto da una lastra di vetro che presenta 5 fori, applicati a distanze regolari di 6 righe l'uno dall'altro (rispettivamente partendo dal basso: 9, 15, 21, 27, 33 righe) in cui inserire le sferette per i vari lanci.

Nella parte sommitale troviamo un serbatoio a forma di imbuto (figura in basso), grazie al quale è possibile inserire sferette ed eseguire così lanci da un'altezza di 41 righe (al suo interno troviamo oltretutto una manopola tramite la quale si fa girare una ruota con delle incavature e che permette di intervallare i tempi di caduta delle singole palline in modo da evitare possibili urti fra due o più di esse durante la caduta).

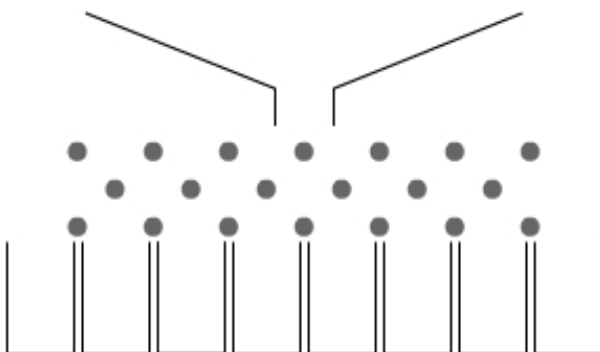
La struttura, inoltre, considerata la sua altezza, presenta due scalini per permettere a chi esegue l'esperimento di poter accedere al serbatoio per depositarvi le palline.

La parte terminale del piano è costituita invece da 36 vaschette (figura in basso), ognuna delle quali è poco più larga del diametro di una singola

sferetta, atte a contenere le palline una volta completato il loro percorso tra le righe sfalsate di pioli.

La base del piano è tenuta chiusa da una sorta di coperchio, che impedisce così alle palline di cadere.

Ogni qual volta si vuole ripetere un lancio, è possibile aprire il coperchio (che funge da guida) e scaricare le palline in un contenitore apposito e fornito con lo stesso apparato.



3 – TEORIA

La teoria ci dice che la distribuzione ottenuta sperimentalmente deve in un certo qual modo approssimarsi il più possibile alla **DISTRIBUZIONE TEORICA** che meglio verifica le ipotesi che si presentano nell'esperimento svolto.

3.1 - DISTRIBUZIONE BINOMIALE

La funzione (3.1.1) che genera tale distribuzione è la funzione **B**, in cui **n** rappresenta il numero di eventi; **k** dell'intervallo **[0, n]** è il numero di volte che una pallina cade a destra dopo l'urto con un piolo e varia ogni qual volta si calcola il valore di un caso; **p** è la probabilità che si verifichi un evento; **q = 1-p** chiaramente è la probabilità inversa.

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (3.1.1)$$

E' da tener presente quindi che, più i dati acquisiti in laboratorio sono effetti da errori (ad esempio a causa del fatto che nella Quinconce i pioli possano non essere esattamente perpendicolari al piano, o che il piano stesso presenti una superficie non regolare; tutte anomalie che possono far variare la probabilità per una pallina di cadere a destra dopo l'urto con un piolo) più la distribuzione sperimentale risulterà lontana da quella teorica, ma questo aspetto verrà approfondito successivamente, nel paragrafo 10.

Esistono inoltre altre due distribuzioni teoriche, che particolarizzano i casi generali della binomiale.

Si tratta della distribuzione di **GAUSS** (o legge normale), generata dalla funzione G (3.2.1), e della distribuzione di **POISSON**, generata dalla funzione P (3.3.1).

Può accadere difatti che una distribuzione sperimentale si approssimi meglio, per qualche particolare motivo, ad una delle due sopracitate, e non alla binomiale.

Vediamo rapidamente di descriverle e di spiegare i termini in esse coinvolte.

3.2 - DISTRIBUZIONE DI GAUSS

$$Z = k - \mu$$

Tale distribuzione è solitamente utilizzata per eventi il cui numero è considerevolmente grande ($N > 100$).

Vi compare la costante **h**, detta modulo di precisione pari all'espressione riportata a fianco, dove **σ** è la deviazione standard. **Z** è invece l'errore accidentale che varia al variare dell'indice **k** e **μ** è il cosiddetto valore medio pari al prodotto fra **n** (numero eventi) e **p** (probabilità che si verifichi un evento).

La funzione risulterà pertanto massima per $z = 0$, ovvero $k = \mu$, e minima per $z \rightarrow \pm\infty$, ovvero per $k \rightarrow \pm\infty$.

$$G(z; h) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} \quad (3.2.1)$$

3.3 - DISTRIBUZIONE DI POISSON

Questa particolare distribuzione è prevalentemente utilizzata per eventi rari (quali ad esempio il decadimento radioattivo), eventi cioè le cui probabilità che si verifichino sono molto piccole ed in numero piuttosto grande.

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (3.3.1)$$

Teniamo presente però, che le funzioni qui citate sono riportate nel caso generale, non specifiche quindi per le distribuzioni sperimentali ottenute dalla prova in laboratorio.

Più avanti, nel paragrafo 9, vedremo come adattarle, sfruttando dei valori sperimentali che ci ricaveremo, in modo da poterne fare un confronto effettivo con le distribuzioni sperimentali.

4 - SCOPO DELL'ESPERIMENTO

Scopo dell'esperimento è sicuramente la ricerca di un confronto tra le previsioni teoriche e le distribuzioni sperimentali, in modo tale da poter realizzare delle considerazioni sullo stato dell'apparato utilizzato, avendo così l'opportunità di poter lavorare direttamente, tramite un interessante esperimento, di semplice attuazione, con la teoria delle probabilità.

Ci si potrebbe chiedere ad esempio perché alcune vaschette presentino comunque un numero maggiore di sfere rispetto ad altre, e perché questo numero diminuisca man mano che ci si allontana dal punto centrale corrispondente al punto in cui si effettuano i lanci.

Si vuol provare pertanto come una **DISTRIBUZIONE SPERIMENTALE**, che ben giustifica le precedenti domande rispondendo alle leggi statistiche, sia tanto più confrontabile con una corrispettiva **DISTRIBUZIONE TEORICA** (che ricordiamo può essere Binomiale, di Gauss o di Poisson) tanto più l'apparato utilizzato sia privo di anomalie.

Le grandezze misurate direttamente in laboratorio sono comunque ben poche, ovvero il conteggio delle sfere relative agli indici di colonna e il numero di righe di pioli per cui si è effettuato il lancio.

Ulteriori, ma non essenziali ai fini dell'esperimento, sono i dati relativi a lunghezze percorse dalle sfere e tempi impiegati dalle stesse, durante la caduta, al fine di poterne calcolare la velocità media.

5 – SVOLGERE L'ESPERIMENTO

L' esecuzione dell'esperimento è piuttosto semplice.

- Si inserisce un numero determinato di sfere di acciaio in uno dei fori presenti sulla lastra di vetro (od eventualmente nel serbatoio) in modo da effettuare il lancio a partire da una certa altezza.
- Si tenga presente che le sfere vanno inserite ad intervalli regolari ed opportuni (per esempio di un paio di secondi l'una dall'altra) in modo tale da evitare che possano urtarsi fra loro durante la caduta: se ciò dovesse accadere si comprometterebbe difatti il risultato dell'esperienza poiché si varierebbe così la reale probabilità per una singola pallina di cadere a destra o a sinistra dopo l'urto con un piolo.
- Si completa il lancio di tutte le sfere attendendo che tutte giungano alle loro locazioni nella parte terminale del piano.
- Si procede in tal modo ad effettuare il loro conteggio riferito alle singole colonne in cui esse si sono depositate (tali sfere durante la caduta seguono l'andamento casuale dato dagli urti con i pioli delle righe sfalsate).

- Dopo aver appuntato i dati relativi al numero di sferette per ogni locazione e al numero di righe di riferimento per l'altezza da cui si è effettuato il lancio, si può procedere a rimuovere il coperchio sottostante la parte terminale del piano e svuotare così tutte le locazioni.
- Fatto ciò, si può eventualmente eseguire un nuovo lancio, o dalla stessa altezza (riferita sempre al numero righe) in modo da poter in caso sommare le distribuzioni ottenute in più lanci, oppure da differenti altezze.

Per rilevare invece tempi e lunghezze delle sferette in caduta si è proceduto nel seguente modo:

- Si misurano prima di tutto le distanze percorse dalle sferette in caduta (si è considerata tale distanza come lo spazio percorso dalla sferetta dal punto in cui viene lanciata - bordo inferiore del foro in cui viene inserita la sferetta - alla parte finale dell'ultima riga di pioli, ovvero prima dell'inizio delle celle di incanalamento).
- Presa una sferetta, la si lascia cadere e se ne misura il tempo di caduta dai punti di inizio e fine percorso descritti come prima. Andranno comunque presi più tempi, per poter fare dei calcoli più attendibili.
- L'operazione va ripetuta per ogni altezza scelta da cui si è effettuato il lancio della sferetta.

6 – STRUMENTI

Gli strumenti utilizzati, per acquisire i dati in laboratorio, sono:

- Il metro

Sensibilità di lettura	0.001 m
Sensibilità di misura	0.0005 m

- Il cronometro manuale

Sensibilità di lettura	0.01 s
Sensibilità di misura	0.005 s

7 – ORGANIZZAZIONE

E' essenziale ai fini dell'esperimento, effettuare un conteggio preciso di tutte le sferette cadute in un lancio, relative ad ogni singola locazione.

I dati vanno chiaramente sistemati in una opportuna tabella in cui viene rispettato l'ordine, partendo dalla prima locazione da sinistra verso destra o dalla prima locazione da destra verso sinistra.

E' inoltre consigliabile sommare i singoli conteggi per vedere se il numero totale di sferette contate corrisponde al numero di sferette lanciate.

E' consigliato oltretutto, per eseguire distribuzioni con numeri più elevati di sferette, effettuare più lanci da massimo 100 sferette ciascuno, in modo da evitare che tali palline possano fuoriuscire da una locazione perché in soprannumero.

Bisogna infine riferire i lanci effettuati al numero di righe di pioli incontrate dalle sferette in caduta (da intendersi come numero di eventi che si sono verificati), e ciò è fondamentale, come precedentemente accennato, poiché rispetto a tale indice verranno calcolati il valor medio e di seguito le distribuzioni teoriche (binomiale, di Gauss, di Poisson).

8 – DATI

I dati delle misure dirette effettuate in laboratorio, sono mostrati qui di seguito.

8.1 – CONTEGGI SFERETTE

Sono state eseguite tre diverse distribuzioni, rispettivamente per $n = 9$ Righe, $n = 21$ Righe e $n = 33$ Righe, ognuna delle quali con un totale di 500 sfere lanciate e quindi di 5 lanci da 100 sfere ciascuna direttamente sommati. Nella Tabella 1 seguente, possiamo trovare, relativamente alle tre distribuzioni, gli indici di colonna x_i , i conteggi n_i delle sfere ivi presenti e gli indici u_i in bianco nella colonna verde (che sono i dati effettivamente acquisiti in laboratorio) ed in aggiunta gli indici di restrizione k_i , il cui significato sarà spiegato in seguito.

Tabella 1

i	U _i	X _i	9 Righe		21 Righe		33 Righe	
			k _i	n _i	k _i	n _i	k _i	n _i
1	18	1	-	0	-	0	-	0
2	17	2	-	0	-	0	0	0
3	16	3	-	0	-	0	1	0
4	15	4	-	0	-	0	2	0
5	14	5	-	0	-	0	3	0
6	13	6	-	0	-	0	4	2
7	12	7	-	0	-	0	5	2
8	11	8	-	0	0	1	6	0
9	10	9	-	0	1	3	7	0
10	9	10	-	0	2	0	8	3
11	8	11	-	0	3	6	9	16
12	7	12	-	2	4	9	10	8
13	6	13	-	3	5	15	11	17
14	5	14	0	7	6	20	12	21
15	4	15	1	29	7	37	13	28
16	3	16	2	57	8	51	14	40
17	2	17	3	76	9	54	15	33
18	1	18	4	109	10	67	16	56
19	1	19	5	88	11	57	17	60
20	2	20	6	64	12	58	18	43
21	3	21	7	35	13	43	19	43
22	4	22	8	16	14	22	20	35
23	5	23	9	8	15	26	21	24
24	6	24	-	6	16	12	22	16
25	7	25	-	0	17	7	23	14
26	8	26	-	0	18	7	24	21
27	9	27	-	0	19	2	25	10
28	10	28	-	0	20	2	26	3
29	11	29	-	0	21	1	27	4
30	12	30	-	0	-	0	28	0
31	13	31	-	0	-	0	29	1
32	14	32	-	0	-	0	30	0
33	15	33	-	0	-	0	31	0
34	16	34	-	0	-	0	32	0
35	17	35	-	0	-	0	33	0
36	18	36	-	0	-	0	-	0
		TOTALI		$\sum_{i=1}^{36} n_i = 500$		$\sum_{i=1}^{36} n_i = 500$		$\sum_{i=1}^{36} n_i = 500$

Nota: da considerare comunque che i valori sono stati riportati nell'ordine crescente delle colonne da sinistra verso destra all'aumentare dell'indice i .

Gli n_i evidenziati con sfondo grigio, rappresentano le restrizioni applicate.

8.2 – TEMPI E LUNGHEZZE

Si è ritenuto interessante, in aggiunta, misurare le tre distanze s_i tra la parte finale di ogni foro e la parte finale dell'ultima riga di pioli in basso (Tabella 2) per mezzo del metro presente in laboratorio. Sono stati inoltre presi, con il cronometro manuale, 5 tempi t_i per ogni lunghezza, riportati in ordine cronologico come in Tabella 3.

Tabella 2

	i	S_i
9 Righe	1	$0.203 \pm 0.0005 \text{ m}$
21 Righe	2	$0.468 \pm 0.0005 \text{ m}$
33 Righe	3	$0.735 \pm 0.0005 \text{ m}$

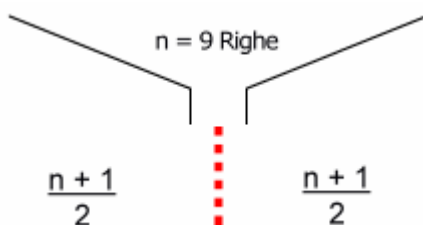
Tabella 3

	9 Righe	21 Righe	33 Righe
i	t_i	t_i	t_i
1	$2.05 \pm 0.005 \text{ s}$	$5.19 \pm 0.005 \text{ s}$	$8.10 \pm 0.005 \text{ s}$
2	$2.20 \pm 0.005 \text{ s}$	$5.33 \pm 0.005 \text{ s}$	$7.68 \pm 0.005 \text{ s}$
3	$2.32 \pm 0.005 \text{ s}$	$4.56 \pm 0.005 \text{ s}$	$7.93 \pm 0.005 \text{ s}$
4	$2.44 \pm 0.005 \text{ s}$	$5.30 \pm 0.005 \text{ s}$	$7.61 \pm 0.005 \text{ s}$
5	$2.18 \pm 0.005 \text{ s}$	$4.87 \pm 0.005 \text{ s}$	$7.83 \pm 0.005 \text{ s}$

Questi dati verranno discussi successivamente nel paragrafo 9.8.

9 – RISULTATI

Per ogni distribuzione, sono stati calcolati i relativi valori della \bar{x} (media aritmetica), della $s^2(\mathbf{x})$ (varianza sperimentale) e i corrispettivi valori delle tre funzioni delle distribuzioni teoriche, ovvero Binomiale, di Gauss e di Poisson.



Nota: prestiamo molta attenzione però al calcolo dei valori elencati, poiché i lanci effettuati dalle altezze $n = 9$ Righe, $n = 21$ Righe, $n = 33$ Righe, rappresentano delle restrizioni della Quinconce e quindi non opereremo sul totale delle locazioni di cui la macchina dispone (36), ma sulle $n+1$ locazioni sottostanti la zona centrale, di cui $(n+1)/2$ sono disposte alla sinistra del punto di mezzo ed $(n+1)/2$ alla destra (un esempio illustrativo per $n = 9$ Righe è mostrato qui affianco).

Pertanto gli indici k_i , di cui tratteremo, saranno i corrispondenti delle locazioni il cui numero è relativo alle restrizioni effettuate (vedi Tabella 1).

E' bene precisare, dunque, che i calcoli che verranno qui di seguito affrontati, comprese le stesse funzioni per le distribuzioni teoriche, saranno relativi alle restrizioni fatte in base al numero di righe considerate e che pertanto i valori esterni a tali restrizioni saranno automaticamente nulli, poiché è nulla la probabilità teorica che delle sfere cadano oltre i margini previsti.

Analizziamo rapidamente i significati dei primi due termini.

9.1 - \bar{x} MEDIA ARITMETICA SPERIMENTALE

La \bar{x} è nota come media aritmetica sperimentale, ovvero la miglior approssimazione del valor medio teorico μ (calcolato come prodotto fra n , numero di file di pioli, e p , probabilità per la sferetta di cadere a destra all'incontro con un piolo), ed è ricavata dalla formula (9.1.1), dove n_i è il numero di palline presenti nella i -esima locazione e k_i rappresenta il corrispondente indice (l'indice della locazione i -esima) riferito però alla restrizione come spiegato in precedenza.

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^c n_i k_i}{N_{eff.}} \quad (9.1.1)$$

L'indice i , quindi, è un numero intero i cui valori sono compresi in opportuni intervalli (estremi inclusi), riportati nella Tabella 4.

Tabella 4

	i	$N_{eff.}$
9 Righe	14-23	489
21 Righe	8-29	500
33 Righe	2-35	500

Il termine N , a questo punto, non è più il numero totale di palline lanciate (500 nel nostro caso) ma il numero totale di palline presenti nelle locazioni di nostro interesse, ovvero l' $N_{effettivo}$. Come mostra la tabella, nei due ultimi casi questo N coincide al totale di palline effettivamente lanciate (quindi non avremo problemi né considerazioni ulteriori da porre), ma se consideriamo il caso **n = 9 Righe**, vediamo che 11 sferette sul totale sono uscite fuori dai margini previsti e pertanto (pur chiaramente non eliminandole dalla distribuzione sperimentale e quindi dalla visualizzazione grafica) non le terremo in considerazione per il calcolo della \bar{x} e di seguito della $s^2(x)$ e delle stesse distribuzioni teoriche.

Nel caso $n = 9$ Righe il numero totale di sferette che è fuoriuscito dai margini previsti dalla teoria è pari al 2.2 % del totale di sferette lanciate, una percentuale comunque trascurabile.

9.2 - $s^2(x)$ VARIANZA SPERIMENTALE

La $s^2(x)$, ovvero la varianza sperimentale, è la migliore approssimazione della σ^2 (la varianza teorica, ottenuta dal prodotto fra n , numero di file di pioli, p probabilità per una sferetta di cadere a destra all'incontro con un piolo e q , probabilità inversa) ed è calcolata tramite la formula (9.2.1) $\sigma = \sqrt{npq}$

$$s^2(x) = \frac{1}{N_{eff.} - 1} \sum_i^c n_i (k_i - \bar{x})^2 \quad (9.2.1)$$

Troviamo, trattandosi di una varianza, gli scarti dalla media al quadrato, dati dal termine $(k_i - \bar{x})^2$ e n_i , lo stesso utilizzato per il calcolo della media aritmetica.

In questo caso però precisiamo che la divisione totale viene effettuata per $N_{\text{effettivo}} - 1$ oggetti, anziché $N_{\text{effettivo}}$, poiché in essa includiamo la media aritmetica, un valore che deve essere sottratto al numero totale di oggetti utilizzati.

Tale valore, insieme a quello della media aritmetica, verrà utilizzato nel calcolo delle funzioni per le previsioni teoriche.

Ricordiamo ancora una volta che anche in questo caso è essenziale considerare le opportune restrizioni.

Nella Tabella 5 troviamo per l'appunto i valori sopra citati calcolati per le tre distribuzioni, opportunamente approssimati alla seconda cifra decimale.

Si possono anche vedere i valori della media teorica μ e della varianza teorica σ^2 , in modo anche da poterne fare un confronto diretto con i risultati sperimentali.

Tabella 5

	i	μ_i	\bar{X}_i	σ_i^2	$S_i^2(X)$
9 Righe	1	4.50	4.25	2.25	3.61
21 Righe	2	10.50	10.38	5.25	11.14
33 Righe	3	16.50	16.96	8.25	17.42

Possiamo visivamente constatare come \bar{x} e $s^2(x)$ varino considerevolmente al variare dell'altezza scelta per i lanci o per meglio dire, siano funzioni del percorso delle sfere.

Si nota inoltre come i valori della varianza sperimentale siano piuttosto differenti da quelli della varianza teorica.

Ciò può essere dovuto al fatto che l'apparato utilizzato presenti numerose, se pur piccole, anomalie, che contribuiscono ad alterare le condizioni che descrivono il sistema (come precedentemente accennato nel paragrafo 3.1), ma questo aspetto verrà comunque approfondito successivamente nel paragrafo 11 in cui si passerà ad un'analisi critica dei risultati ottenuti dai test.

9.3 APPROSSIMAZIONI

E' d'obbligo fare alcune considerazioni sul perché del numero di cifre decimali scelte per approssimare i valori.

Per questo particolare esperimento, i dati diretti che possiamo prendere in laboratorio, e fondamentali ai fini dell'elaborazione (non parliamo dunque di tempi e lunghezze), non sono presi con alcuno strumento, né presentano incertezza, sono difatti semplici conteggi di numeri interi.

I calcoli relativi a tali valori quindi non ci dicono nulla sul numero di cifre decimali da tenere in considerazione e pertanto tutto è a discrezione di chi effettua i calcoli.

Si è soliti, anche tenendo conto della tabella seguente, per elaborazioni relative alle esperienze da laboratorio, prendere generalmente in considerazione la prima o le prime due cifre decimali, a seconda del numero di oggetti coinvolti.

N	%	Cifre decimali
10	24	1
70	8.5	2

Nel nostro caso, essendo N pari a 500, e quindi piuttosto grande, è del tutto lecito considerare le prime due cifre decimali.

Si sarebbe potuto al limite tener presente la terza cifra decimale, visto la quantità di oggetti, ma la percentuale di interesse sarebbe ridotta a tal punto che si potrebbe perfettamente non considerarla senza arrecare alcun danno (notiamo che tale percentuale è già bassa nel caso di 2 cifre decimali).

Consideriamo adesso le funzioni precedentemente descritte nel paragrafo 3 e vediamo come calcolare i valori delle tre possibili previsioni teoriche, adattandole all'esperienza in questione, anche tenendo conto delle complicità di cui si è accennato.

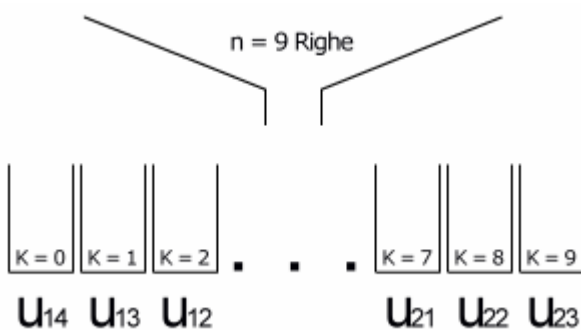
9.4 - CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Per la funzione binomiale il termine **n** rappresenta adesso il numero di file di pioli incontrate (per la Quinconce presente in laboratorio i possibili valori di n sono 9, 15, 21, 27, 33, 41; nel nostro caso ci riferiremo solo a **n = 9 Righe**, **n = 21 Righe** e **n = 33 Righe**).

L'indice **k_i** sarà anche qui un numero intero dell'intervallo **[0, n]** e sarà per l'appunto l'indice di restrizione; **p** è invece la probabilità per la sferetta di cadere a destra (o a sinistra) dopo l'urto con ogni piolo ed è uguale, nelle migliori ipotesi, ad 1/2, mentre **q** è la probabilità di non cadere a destra (o a sinistra) dopo l'urto con ogni piolo.

Essendo inoltre **p = q = 1/2** (e quindi stessa base per gli esponenti) possiamo ridurre la formula nella forma della (9.4.1) rendendo così i calcoli più semplici.

$$B(k_i; n, \frac{1}{2}) = \binom{n}{k_i} \frac{1}{2^n} \tag{9.4.1}$$



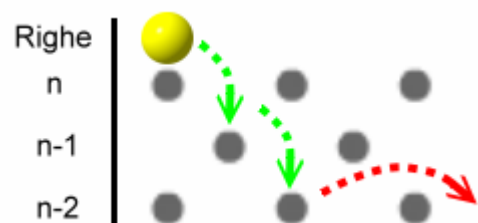
Nota: analizziamo in maniera più approfondita il perché delle restrizioni considerate.

Se ad esempio il buco scelto per effettuare i lanci è quello corrispondente ad n = 9 Righe (vedi Tabella 1), la funzione che genera la distribuzione binomiale (in base al coefficiente binomiale) prevedrà la caduta delle sferette solo ed esclusivamente nelle **n + 1** locazioni i cui indici vanno da **k₁₄** a **k₂₃**.

Tutti i casi che eccedono tali locazioni, hanno probabilità nulla di successo. Pertanto gli indici **k_i** varieranno, nel caso dell'esempio con n = 9 Righe, da **k₁₄ = 0 = u₁₄** a **k₂₃ = 9 = u₂₃**, come mostrato nell'immagine soprastante (puramente illustrativa).

Questo fatto si spiega con semplicità guardando la figura a lato, rappresentante una porzione del piano con una pallina in caduta dall'n-esima riga.

Per quanto già detto, la pallina, qui colorata in giallo, ad ogni urto con un piolo, ha in teoria pari probabilità di cadere o alla sua destra o alla sua sinistra (nell'esempio il suo percorso corretto è indicato dalla freccia verde), ma è chiaro che essa **NON** può, almeno secondo la teoria, saltare due pioli di fila e cadere così, come nell'esempio, alla sinistra di un piolo che non avrebbe dovuto far parte del suo percorso.



Ciò difatti è privo di senso dal punto di vista teorico, perché questa possibilità di salto (indicata dalla freccia rossa) non fa parte delle probabilità del tipo di evento in gioco (l'urto con un piolo).

Sperimentalmente invece questo può avvenire (ad esempio a causa del fatto che il diametro della sferetta è piuttosto piccolo ed i pioli sono molto vicini fra loro) e difatti lo si può riscontrare dai dati relativi ad **n = 9 Righe**, in cui 11 sferette hanno fatto uno o addirittura due salti di troppo.

In ogni caso, la stessa considerazione è da fare per il calcolo delle altre due funzioni (di Gauss e di Poisson), poiché anch'esse prevedranno, come nel caso della binomiale, che le sferette cadano nelle $n+1$ locazioni di riferimento e considereremo dunque nulli i valori di tali funzioni per gli indici di colonna che eccedono i margini della restrizione.

9.5 - CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE DI GAUSS

Per la funzione che ci permette di ottenere la distribuzione normale (9.5.1), è necessario sostituire la varianza teorica σ^2 con quella sperimentale $s^2(\mathbf{x})$ ed il termine \mathbf{z}^2 con gli scarti al quadrato, calcolati dagli indici di restrizione \mathbf{k}_i rispetto alla media sperimentale \bar{x} .

$$G(k_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S(\mathbf{x})}} e^{-\frac{(k_i - \bar{x})^2}{2s^2(\mathbf{x})}} \quad (9.5.1)$$

9.6 - CALCOLO DELLA DISTRIBUZIONE DI POISSON

Infine, per la funzione che genera la distribuzione di Poisson (9.6.1), teniamo presente che bisogna sostituire al valor medio teorico μ la media aritmetica \bar{x} come sua miglior approssimazione, e riferire, ancora una volta, i calcoli all'indice \mathbf{k}_i relativo alla restrizione.

$$P(k_i; \bar{x}) = \frac{\bar{x}^{k_i} e^{-\bar{x}}}{k_i!} \quad (9.6.1)$$

Nota: i risultati delle funzioni così calcolate, ovvero le distribuzioni continue, non sono ancora confrontabili con i conteggi delle sferette, che rappresentano invece distribuzioni discrete.

Per far ciò, anche al fine di poter visualizzare grafici che rendono meglio l'idea di come la distribuzione si presenti rispetto al numero di palline (tenendo conto oltretutto che i dati presi in laboratorio sono proprio i conteggi delle palline), basta moltiplicare ogni valore delle funzioni così calcolate per il numero totale \mathbf{N} di sferette usate (nel nostro caso 500).

Si sarebbe potuto, altrimenti, dividere ogni conteggio \mathbf{n}_i della distribuzione sperimentale per il numero totale di palline, rendendola così anch'essa continua e pertanto confrontabile direttamente con le funzioni delle previsioni teoriche; questo però non ci permetterebbe di visualizzare graficamente l'andamento della distribuzione riferito al numero di palline.

Nella Tabella 6 seguente, sono riportati in corrispondenza dei conteggi \mathbf{n}_i eseguiti in laboratorio, i relativi valori delle tre funzioni già moltiplicate per il numero totale \mathbf{N} di sferette lanciate (l'apice d indica pertanto che si tratta di distribuzioni discrete).

Tabella 6

		9 Righe				21 Righe				33 Righe			
i	n _i	B ₁ ^d (x _i)	G ₁ ^d (x _i)	P ₁ ^d (x _i)	n _i	B ₂ ^d (x _i)	G ₂ ^d (x _i)	P ₂ ^d (x _i)	n _i	B ₃ ^d (x _i)	G ₃ ^d (x _i)	P ₃ ^d (x _i)	
1	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	
2	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,01	0,00	
3	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,03	0,00	
4	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,08	0,00	
5	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,18	0,02	
6	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	2	0,00	0,39	0,07	
7	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	2	0,01	0,79	0,25	
8	0	0,00	0,00	0,00	1	0,00	0,47	0,02	0	0,06	1,52	0,71	
9	0	0,00	0,00	0,00	3	0,00	1,15	0,16	0	0,25	2,78	1,73	
10	0	0,00	0,00	0,00	0	0,05	2,55	0,83	3	0,81	4,78	3,67	
11	0	0,00	0,00	0,00	6	0,32	5,18	2,89	16	2,24	7,77	6,91	
12	2	0,00	0,00	0,00	9	1,42	9,60	7,50	8	5,39	11,92	11,71	
13	3	0,00	0,00	0,00	15	4,84	16,28	15,57	17	11,27	17,26	18,05	
14	7	0,98	8,66	7,17	20	12,91	25,24	26,95	21	20,65	23,61	25,50	
15	29	8,79	24,42	30,42	37	27,67	35,77	39,96	28	33,36	30,50	33,27	
16	57	35,16	52,23	64,57	51	48,43	46,33	51,86	40	47,66	37,19	40,29	
17	76	82,03	84,68	91,37	54	69,96	54,86	59,83	33	60,37	42,82	45,54	
18	109	123,05	104,09	96,98	67	83,95	59,38	62,11	56	67,92	46,56	48,26	
19	88	123,05	97,00	82,34	57	83,95	58,75	58,62	60	67,92	47,79	48,14	
20	64	82,03	68,54	58,26	58	69,96	53,14	50,72	43	60,37	46,32	45,35	
21	35	35,16	36,71	35,34	43	48,43	43,94	40,50	43	47,66	42,39	40,47	
22	16	8,79	14,91	18,75	22	27,67	33,21	30,04	35	33,36	36,63	34,31	
23	8	0,98	4,59	8,85	26	12,91	22,95	20,79	24	20,65	29,89	27,70	
24	6	0,00	0,00	0,00	12	4,84	14,49	13,49	16	11,27	23,02	21,35	
25	0	0,00	0,00	0,00	7	1,42	8,37	8,24	14	5,39	16,75	15,74	
26	0	0,00	0,00	0,00	7	0,32	4,42	4,75	21	2,24	11,50	11,12	
27	0	0,00	0,00	0,00	2	0,05	2,13	2,60	10	0,81	7,46	7,54	
28	0	0,00	0,00	0,00	2	0,00	0,94	1,35	3	0,25	4,57	4,92	
29	0	0,00	0,00	0,00	1	0,00	0,38	0,67	4	0,06	2,64	3,09	
30	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,01	1,44	1,87	
31	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	1	0,00	0,74	1,09	
32	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,36	0,62	
33	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,17	0,34	
34	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,07	0,18	
35	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,03	0,09	
36	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	

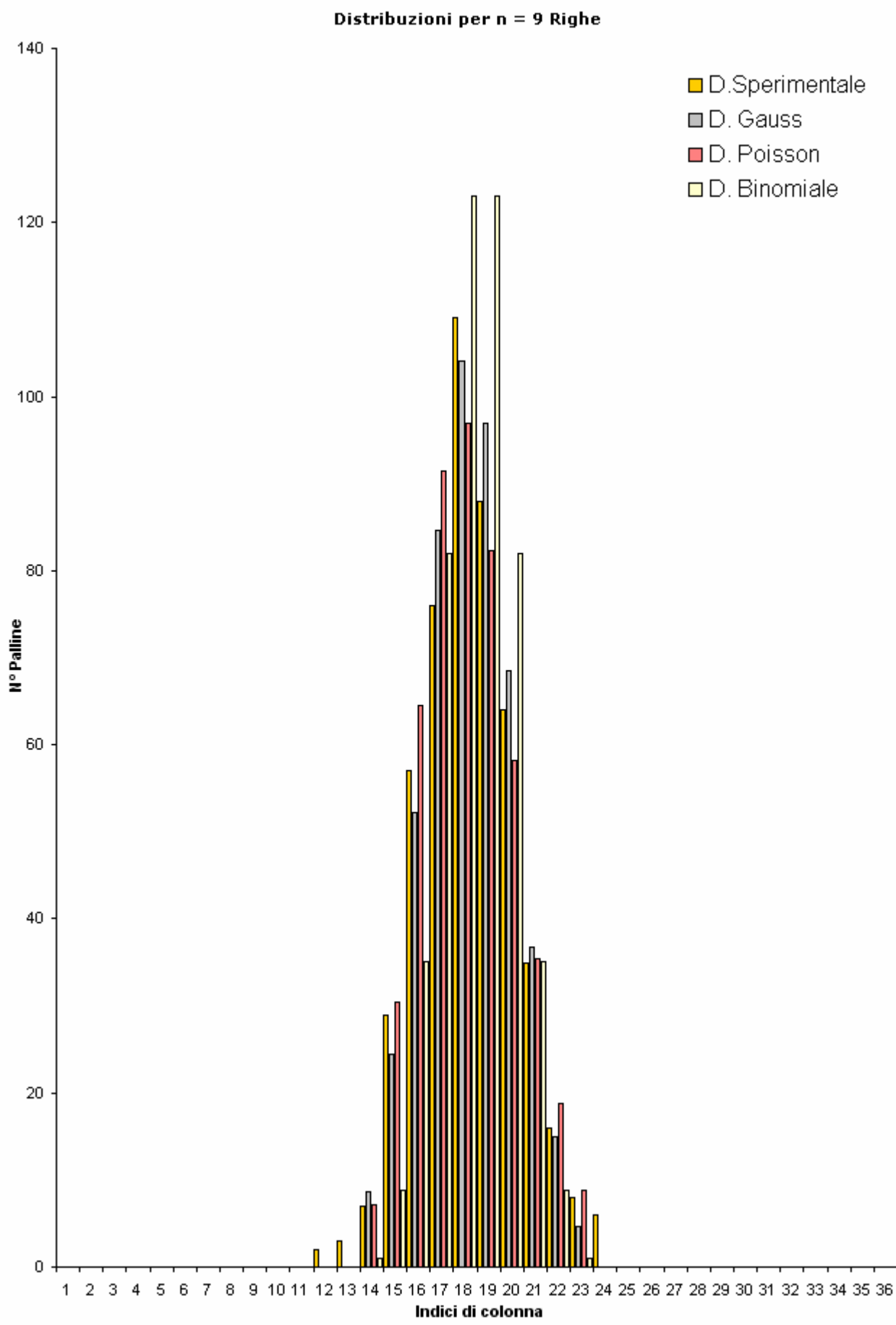
9.7 – GRAFICI

Calcolate così le tre funzioni per tutti gli indici di colonna x_i si procede alla realizzazione dei grafici.

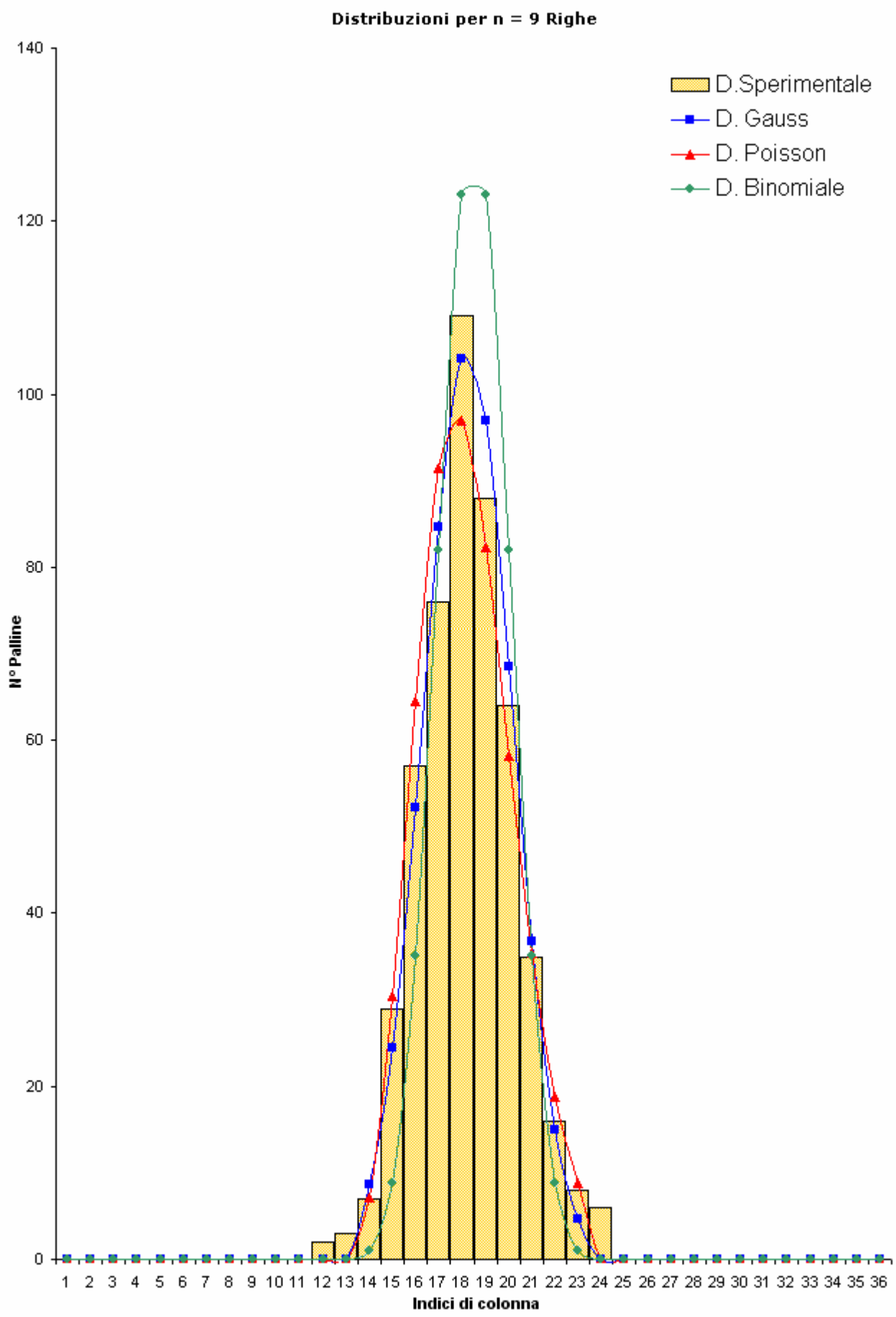
Per ogni altezza scelta da cui si sono effettuati i lanci, ne sono stati realizzati due: il primo grafico rappresenta la distribuzione sperimentale e le tre distribuzioni teoriche sotto forma di istogramma; il secondo invece presenta le tre distribuzioni teoriche come curve continue, sovrapposte all'istogramma della singola distribuzione sperimentale.

In tal modo è possibile avere un'idea d'insieme più completa e poter anche visivamente constatare quale delle tre distribuzioni teoriche più si avvicina a quella sperimentale.

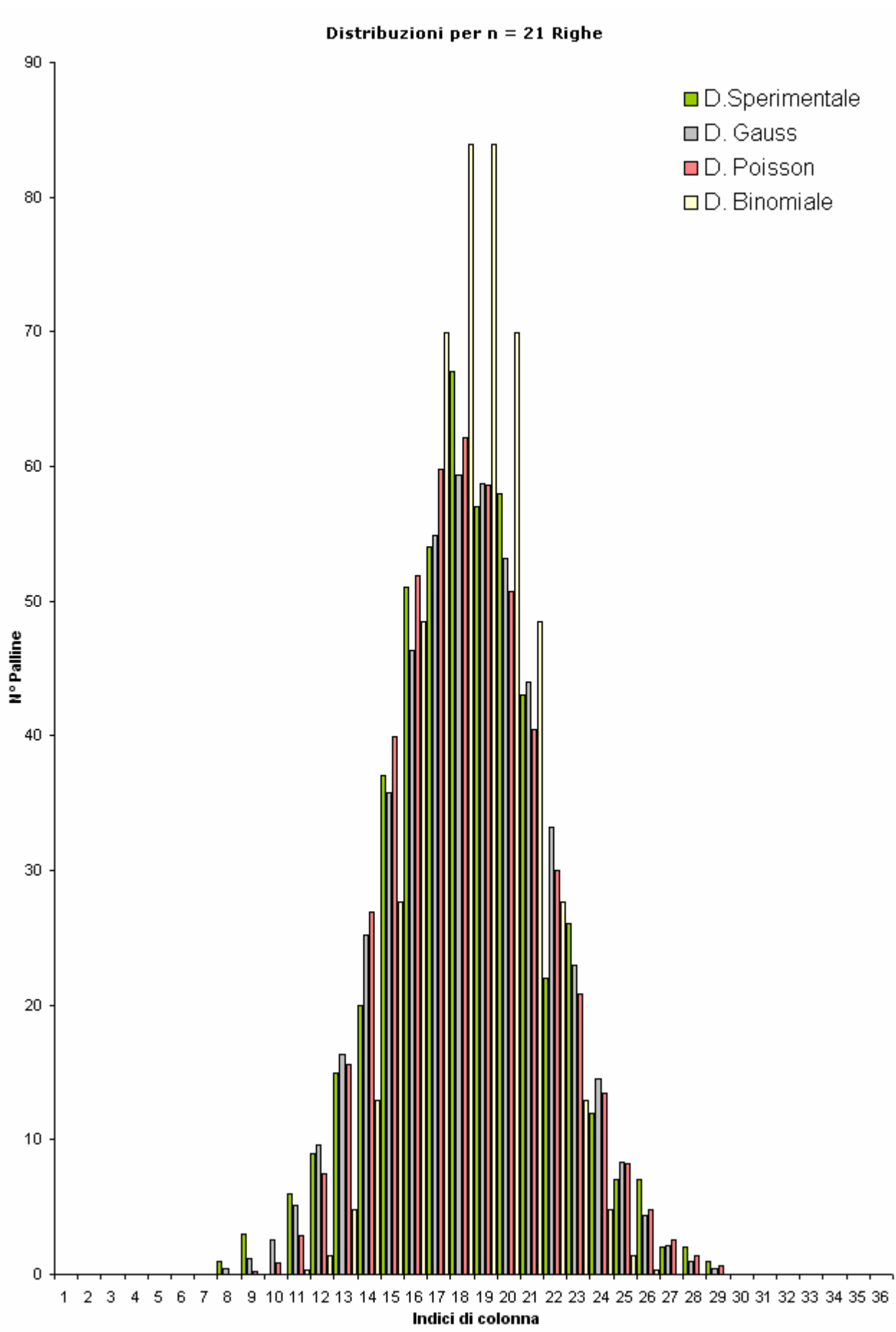
In ordinate è stato riportato chiaramente il N° di palline (essendo la variabile dipendente) e in ascisse invece gli indici di colonna, ovvero la variabile indipendente.



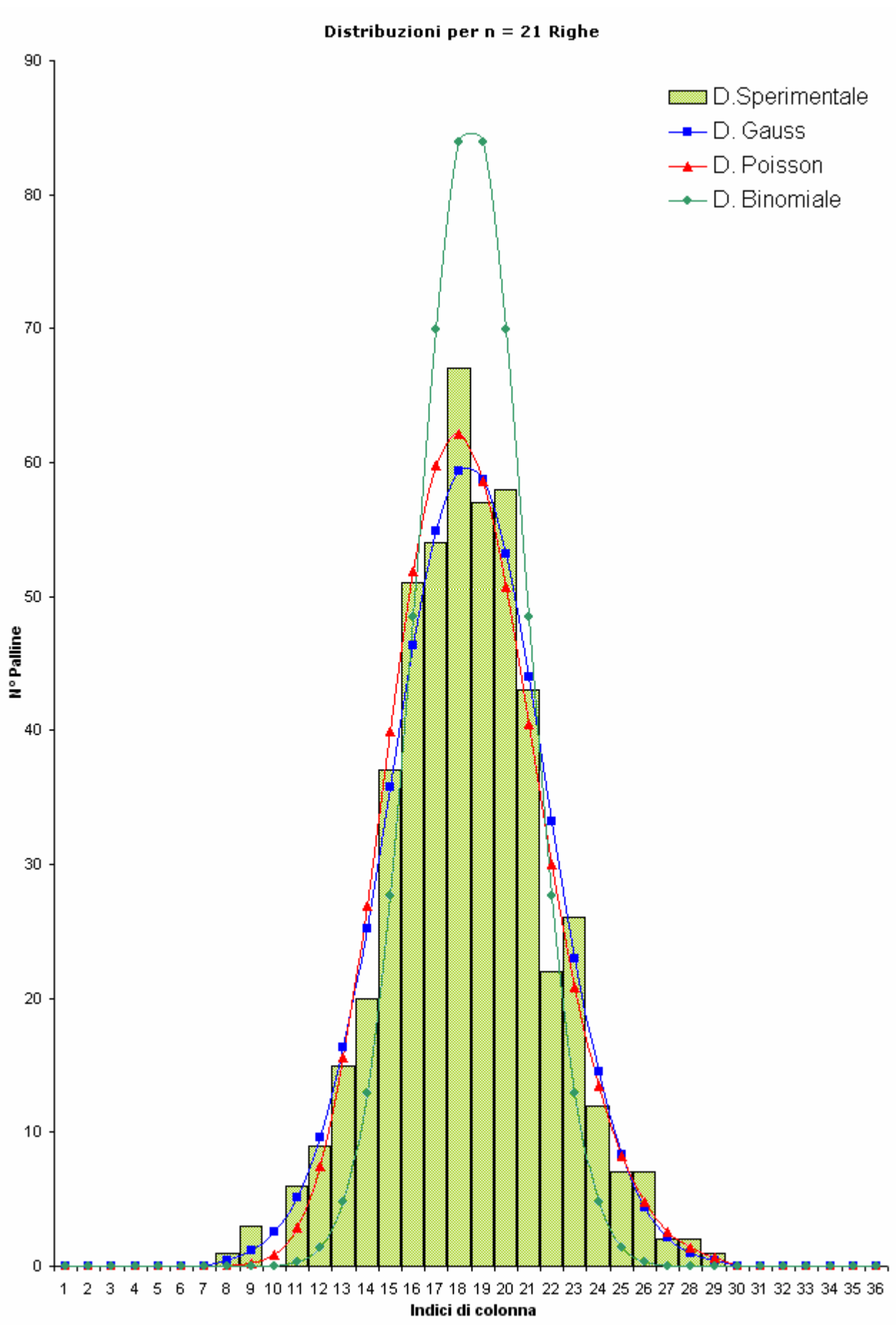
1° Grafico della distribuzione sperimentale e delle tre distribuzioni teoriche per n = 9 Righe



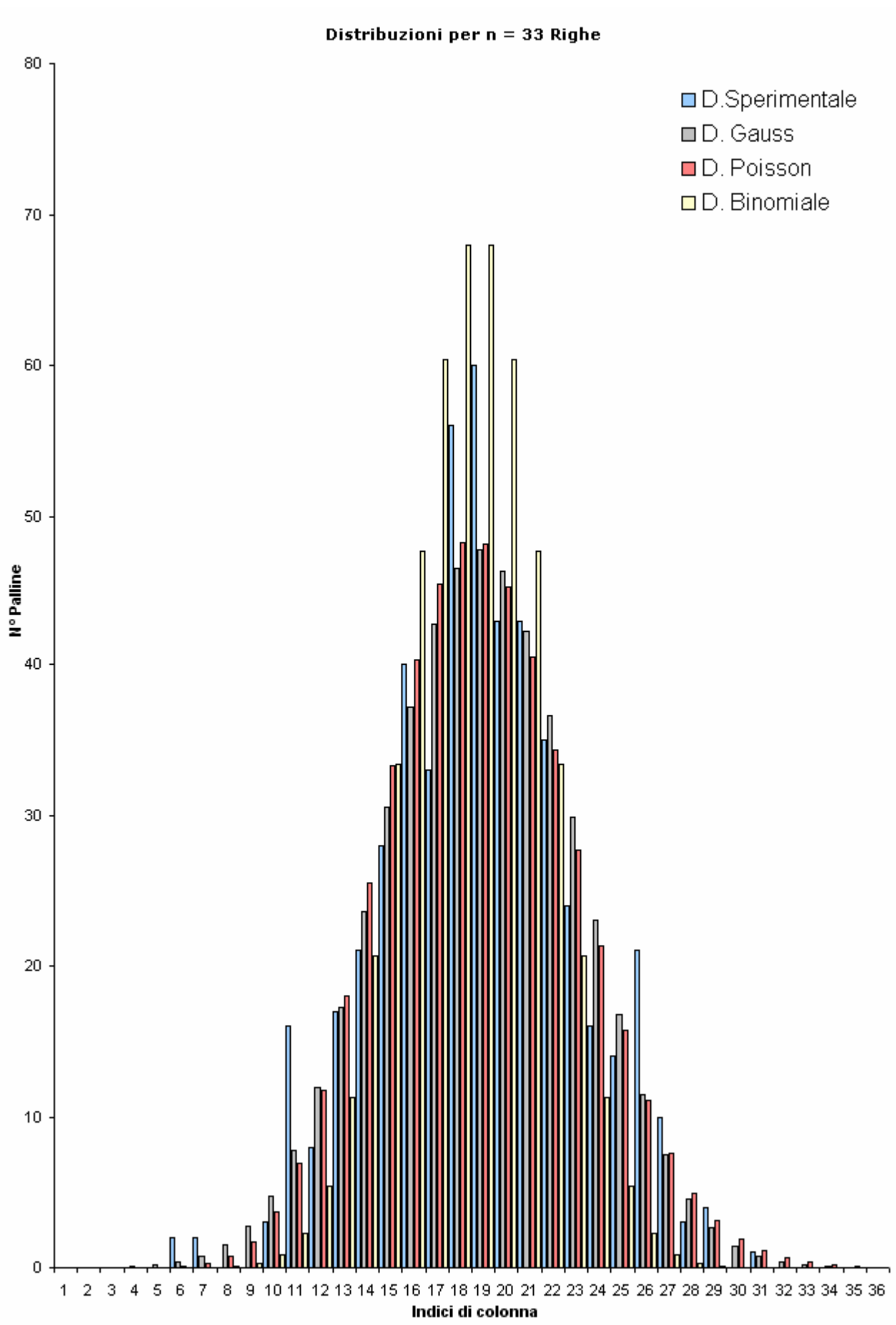
2° Grafico della distribuzione sperimentale e delle tre distribuzioni teoriche per n = 9 Righe



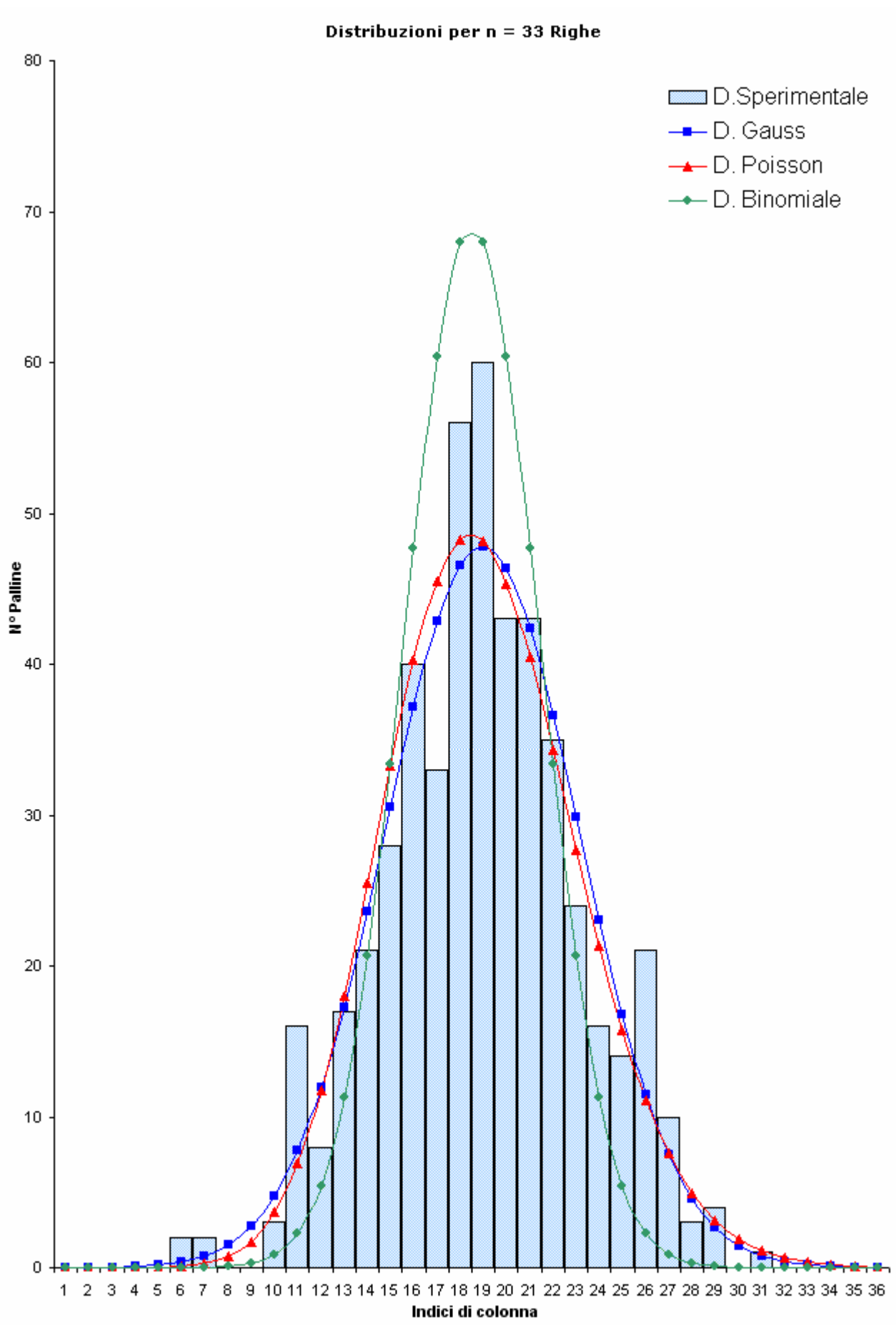
1° Grafico della distribuzione sperimentale e delle tre distribuzioni teoriche per n = 21 Righe



2° Grafico della distribuzione sperimentale e delle tre distribuzioni teoriche per n = 21 Righe



1° Grafico della distribuzione sperimentale e delle tre distribuzioni teoriche per n = 33 Righe



2° Grafico della distribuzione sperimentale e delle tre distribuzioni teoriche per n = 33 Righe

9.8 – VELOCITA' MEDIA

Al fine di poter fare una considerazione sull'effettivo moto delle sferette in caduta (esse accelerano dopo l'urto con ogni piolo e si fermano di seguito nell'urto con il piolo successivo), i dati relativi a tempi e lunghezze, riportati nel paragrafo 8.2 sono stati utili per il calcolo di tre velocità medie, ricavate dalla media dei 5 tempi, per ogni buco scelto.

Si aggiunga inoltre che le lunghezze calcolate sono relative ad una distanza rettilinea, mentre si intuisce che le palline seguiranno un percorso a zig-zag, il quale potrebbe addirittura avere lunghezza doppia rispetto alle effettive lunghezze misurate in laboratorio. Ad ogni modo poiché lunghezze dirette e percorsi irregolari a zig-zag sono pressoché proporzionali, i risultati ottenuti ci permetteranno di effettuare delle conclusioni valide ed estendibili pertanto a qualsiasi tipo di percorso la singola sferetta possa compiere all'interno della Quinconce.

Per poter stabilire il numero di cifre decimali da tenere in considerazione, si è applicata la propagazione degli errori per la velocità media (la cui funzione è data chiaramente come rapporto fra lunghezza e tempo).

$$\gamma_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 \gamma_s^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \gamma_t^2}$$

Si calcola così l'errore totale γ della velocità media, secondo la formula qui presente.

Gli errori totali γ_s e γ_t relativi rispettivamente alle lunghezze e ai tempi, in questo caso coincidono il primo con la sensibilità di misura del metro, ed il secondo alla somma quadratica di errore massimo a priori del cronometro manuale ed errore accidentale, calcolato chiaramente come deviazione standard dei valori presenti.

Nella Tabella 7 seguente troviamo gli errori totali sulle velocità medie e i valori corretti delle velocità medie.

Tabella 7

	i	$\gamma_{\bar{v}_i}$	\bar{V}_i
9 Righe	1	0.006 m/s	0.091 ± 0.006 m/s
21 Righe	2	0.006 m/s	0.093 ± 0.006 m/s
33 Righe	3	0.002 m/s	0.094 ± 0.002 m/s

Si può notare difatti come i valori corretti delle velocità medie siano pressoché costanti anche al variare dell'altezza scelta e pertanto si può affermare che la velocità media non varia al variare della lunghezza del percorso compiuto dalle sferette.

10 - CONFRONTO CON LA TEORIA

In questo paragrafo si passerà all'analisi dei dati calcolati, per mezzo di alcuni interessanti test, i cui risultati ci permetteranno di stabilire lo stato dell'apparato utilizzato e di fare pertanto delle considerazioni sull'esperimento stesso.

10.1 – TEST DI ASIMMETRIA β_1 per la distribuzione normale

Si tratta di un test relativo alla sola distribuzione di Gauss e pertanto l'apice G vuol ricordare che ci si sta riferendo a tale distribuzione.

Nella formula (10.1.1) vi compare l'indice di restrizione k_i , $s^3(\mathbf{x})$ e il termine $n + 1$, dove n corrisponde al numero di righe di pioli incontrate (ovvero nei casi analizzati, $n = 9$, $n = 21$ e $n = 33$).

$$\beta_1^G = \frac{\sum^C (k_i - \bar{x})^3}{(n+1)s^3(x)} \quad (10.1.1)$$

Si lavora pertanto con una potenza dispari, che sia diversa da 1. In tal modo i possibili risultati potranno essere sia negativi che positivi.

Si tenga presente che anche in questo caso le somme vanno effettuate per opportuni intervalli dell'indice i , già riportati in precedenza nella Tabella 4.

Per una perfetta simmetria il risultato del test darà il valore 0; nel caso in cui si presenti asimmetria a sinistra il valore sarà minore di 0; se si ha asimmetria a destra invece il valore sarà maggiore di 0.

I valori relativi a tale test sono presenti nella Tabella 8.

Tabella 8

	i	β_{1i}^G
9 Righe	1	0.92
21 Righe	2	0.38
33 Righe	3	- 1.81

10.2 – TEST DI SCHIACCIAMENTO β_2 per la distribuzione normale

Anche in questo caso si tratta di un test relativo alla sola distribuzione di Gauss.

I termini coinvolti sono gli stessi dei precedenti, solo che in questo caso, si lavora con la quarta potenza ed i risultati pertanto non potranno che essere positivi.

$$\beta_2^G = \frac{\sum^C (k_i - \bar{x})^4}{(n+1)s^4(x)} \quad (10.2.1)$$

Se il valore del test è pari a 3 si ha una distribuzione normale; se tale valore è minore di 3 la distribuzione sarà più schiacciata rispetto a quella normale; se invece tale valore è maggiore di 3 allora si avrà una distribuzione più alta.

La Tabella 9 riporta i risultati del test.

Tabella 9

	i	β_{2i}^G
9 Righe	1	9.51
21 Righe	2	18.81
33 Righe	3	55.30

10.3 - TEST χ^2 applicato alle distribuzioni di frequenza

Questo test, a differenza dei due precedenti, può essere applicato a tutte e tre le distribuzioni teoriche calcolate.

Ha una notevole importanza per l'analisi critica dei risultati, poiché ci permette di stabilire il grado di attendibilità dei dati acquisiti in laboratorio e pertanto tramite esso è possibile valutare quanto prossime alla teoria siano le nostre distribuzioni sperimentali.

Nella formula (10.3.1) troviamo, al numeratore, la differenza tra valori della distribuzione sperimentale e valori delle distribuzioni teoriche indicati con l'apice d, per ricordare che si tratta di distribuzioni a valori discreti, confrontabili per l'appunto con i valori sperimentali.

$$\chi^2 = \sum_i^C \frac{(n_i - f_i^d)^2}{f_i^d} \quad (10.3.1)$$

I valori del test sono compresi nell'intervallo $[0, +\infty[$ e pertanto l'attendibilità dei dati sarà tanto maggiore quanto più piccoli sono tali valori.

Anche in questo caso si dovranno considerare le restrizioni e pertanto l'indice i varierà ancora una volta secondo gli intervalli riportati in Tabella 4.

Nella Tabella 10 seguente troviamo i risultati del test.

Tabella 10

	i	χ_{iB}^2	χ_{iG}^2	χ_{iP}^2
9 Righe	1	169.62	6.56	6.48
21 Righe	2	11443.51	18.07	126.89
33 Righe	3	3045.11	48.06	102.92

11 - ANALISI CRITICA DEI RISULTATI

Avendo così calcolato i valori dei test affrontati nel paragrafo precedente, si possono effettuare delle considerazioni sullo stato dell'apparato utilizzato.

Dal test di asimmetria (Tabella 8) notiamo che per $n = 9$ Righe e per $n = 21$ Righe, si ha un'asimmetria (se pur piccola) a sinistra del valor medio, mentre per il caso $n = 33$ Righe si ha un'asimmetria (più evidente) a destra del valor medio.

Nel test di schiacciamento invece (Tabella 9), si può vedere come tutte le distribuzioni risultino più alte rispetto a quella teorica, in particolare la terza ($n = 33$ Righe).

Si nota difatti l'aumentare dei valori dei test all'aumentare del numero di righe di pioli incontrate dalle sferette durante la caduta. Questo ci conduce a ritenere che l'apparato presenti un considerevole numero di anomalie e chiaramente, con un allungamento del percorso delle sferette, le anomalie incontrate saranno in numero sempre maggiore.

Tali irregolarità, cercando di ipotizzare in maniera logica, potrebbero essere dovute principalmente alla posizione non ortogonale dei pioli rispetto al piano (in tal modo si varia appunto la probabilità per una sferetta di cadere a destra o a sinistra dopo l'urto con il piolo stesso) oppure a causa del fatto che la superficie stessa del piano presenti possibili avvallamenti o cunette che disturbino il percorso delle sferette o per di più che il piano stesso non sia per l'appunto una

superficie piana ma sia deformato. Si noti comunque che tali imperfezioni erano già visibili dai valori delle varianze sperimentali, alquanto differenti dai valori delle varianze teoriche e, anche in questo caso, sempre più evidenti all'aumentare dell'altezza scelta per effettuare i lanci.

Per quanto concerne il test del χ^2 (Tabella 10), si vede come la distribuzione binomiale sia la meno confrontabile con quella sperimentale in tutti e tre i casi.

La distribuzione di Poisson (nel primo caso) e quella di Gauss in particolare per tutti e tre i casi, sembrano invece approssimarsi meglio alle distribuzioni sperimentali e difatti ciò è dovuto al fatto che, essendo la gaussiana la distribuzione degli errori accidentali, tali distribuzioni sono proprio affette da errori di tipo accidentale.

Risulta comunque chiaro che il grado di attendibilità delle distribuzioni sperimentali in questione non è comunque ottimale, se riferito al primo caso con $n = 9$ Righe, ed è addirittura piuttosto scadente per gli ultimi due casi.

Ciò è certamente giustificabile considerando che l'apparato, come ogni altro, è soggetto all'usura del tempo e soprattutto degli sperimentatori stessi.

Bisogna infine puntualizzare che per questa particolare esperienza, i disaccordi, che emergono dai calcoli fatti, non sono imputabili a chi esegue l'esperimento, ma sono causati direttamente dallo stesso apparato utilizzato. E' difatti essenziale per la Quinconce di Galton, ai fini dell'attendibilità dei risultati, che il macchinario sia in condizioni ottimali e tali condizioni non si sono presentate nei casi analizzati.

12 - COME RIFARE L'ESPERIMENTO

Per possibili future prove sperimentali risulterebbe interessante effettuare una prima serie di 10 lanci da un'altezza fissata e confrontarla con una seconda serie di 5 lanci dalla stessa altezza, e constatare se effettivamente, aumentando il numero di lanci, e di conseguenza il numero di sfere coinvolte, si ottengano risultati più vicini a quelli teorici.

Si potrebbe oltretutto realizzare una singola distribuzione (fissata un'altezza in righe da cui effettuare i lanci) variando però l'angolo di inclinazione del supporto che regge il piano per ogni serie di lanci effettuata.

In tal modo si potrebbe verificare se la distribuzione risulti in un certo qual modo disturbata dalla variazione dell'angolo di inclinazione (anche se ciò non dovrebbe avvenire) e si potrebbero così fare delle conclusioni più dettagliate sullo stato dell'apparato utilizzato (soprattutto concernenti i test di asimmetria).

13 - CONCLUSIONI

Possiamo dunque affermare da quanto è stato calcolato che lo stato dell'apparato utilizzato non sia buono e che in base ai risultati ottenuti dai test si trovi in generale disaccordo con i valori delle distribuzioni teoriche.

Pertanto il confronto fra distribuzioni teoriche e distribuzioni sperimentali non ha avuto degli esiti ottimali.

L'esperienza è stata in ogni caso molto interessante ed efficace poiché, pur essendo di semplice attuazione, permette di lavorare direttamente con le leggi statistiche.

Data dell'esperienza:
14/07/2005

BIBLIOGRAFIA

Testi:

A. Foti, C. Gianino – *Elementi di analisi dei dati sperimentali*, Liguori Editore, Napoli, 1999.
F. Liello, M. Severi – *Giornale di Fisica*, Vol. XIX, Roma, 1978.

Siti Internet di riferimento:

Macchina di Galton

http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/macchina_galton/index.html