

# Relazione di laboratorio di Fisica I corso A-L

Laboratorio di Fisica I del Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università degli studi di Catania.

**Guglielmo Garofalo.**

In questa relazione vengono presentati i risultati della misura della costante elastica di tre molle, ottenuta presso il Laboratorio di Fisica I dell'Università degli studi di Catania.

E' stata determinata la relazione quantitativa fra il carico e l'allungamento per ciascuna delle molle e poi queste sono state combinate in serie nei due modi possibili al fine di verificare la validità della legge di Hooke.

**ARGOMENTO: MECCANICA, MOLLE.**

**INTRODUZIONE:**

**Chi fu Robert Hooke?**



Robert Hooke nacque a Freshwater nel 1635 fu uno dei più brillanti e versatili scienziati inglesi del XVII secolo. Frequentò, pur senza conseguire la laurea, l'università di Oxford, dove entrò in contatto con il gruppo di studiosi (John Wilkins, John Wallis, Christopher Wren, Robert Boyle, tra gli altri) che in seguito avrebbero costituito il primo nucleo della Royal Society. Fu un abilissimo inventore e costruttore di strumenti scientifici (il suo nome è legato a un tipo di microscopio). Formulò, inoltre, una teoria ondulatoria della luce che enunciò articolatamente nella *Micrographia*, del 1665. Nel campo della pneumatica, il nome di Hooke è legato, in particolare, alla costruzione di una versione perfezionata della pompa pneumatica di Otto von Guericke (1602-1680), poi descritta da Boyle (1627-1691) - di cui fu assistente negli anni tra il 1657 e il 1662 - nei *New Experiments Physico-Mechanical* del 1660. Mediante un'ingegnosa serie di prove sperimentali condotte con questo strumento, Boyle e Hooke dimostrarono che gli effetti osservabili nell'esperimento torricelliano erano realmente dovuti all'aria e alla sua pressione, che il suono era impossibile nel vuoto e che l'aria era caratterizzata da una permanente elasticità.

**Che cos'è la legge di Hooke?**

Se allunghiamo la molla in modo che il suo estremo si porti in una posizione  $x$ , questo eserciterà sull'oggetto che ha prodotto l'allungamento una forza:

$$F = -k \cdot x \quad (1)$$

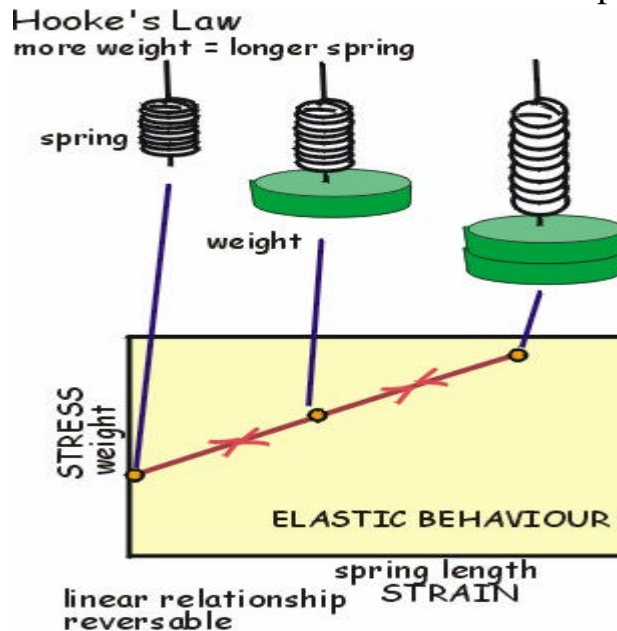
Dove  $k$  è una costante chiamata costante elastica della molla.

L'equazione (1) è nota come legge di Hooke.

Il verso della forza è sempre contrario a quello dello spostamento dell'estremo della molla dall'origine; quando la molla è allungata si ha:  $x > 0$  e  $F < 0$ .

Quando la molla è compressa si ha invece:  $x < 0$  e  $F > 0$ .

La forza esercitata dalla molla è una forza di richiamo, nel senso che è sempre orientata verso l'origine. Le molle reali seguono l'equazione (1), se non vengono deformate entro un certo limite noto come limite di elasticità, oltre il quale se viene applicata una forza alla molla essa subisce una deformazione permanente.



## ESPERIENZA:

### APPARATO SPERIMENTALE:

- Molla ad elica A
- Molla ad elica B
- Molla ad elica C
- Asta graduata
- Diverse masse
- Bilancia
- Calibro

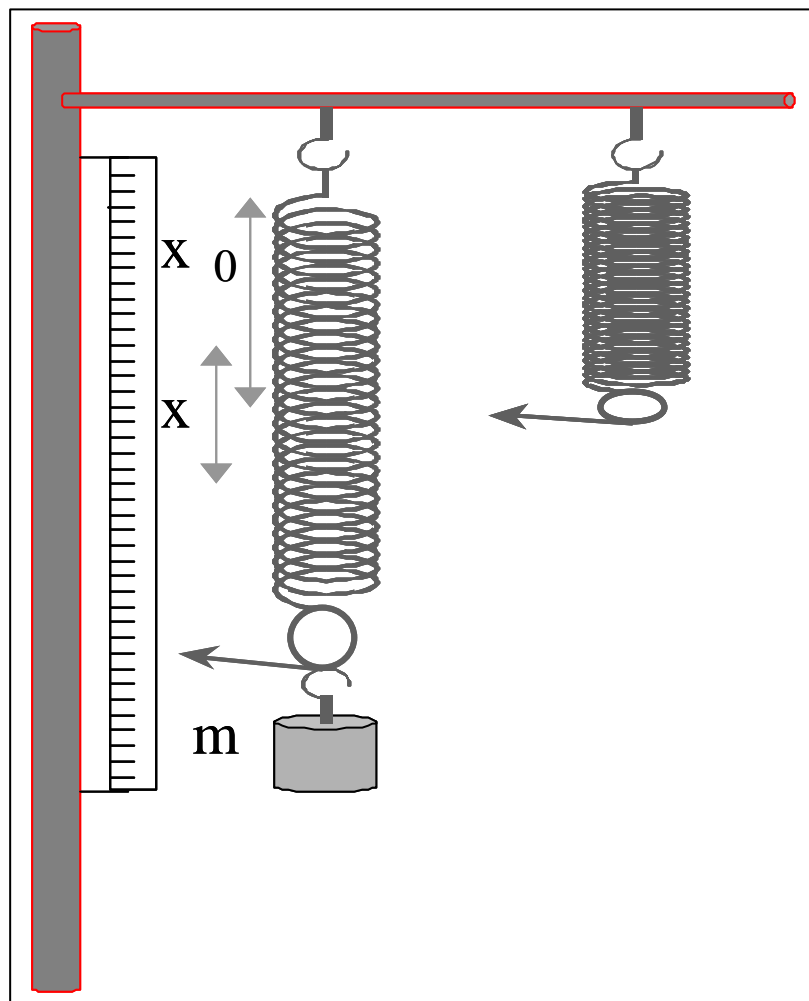


Molla ad Elica

STRUMENTO	SENS. MISURA	SENS. LETTURA	PORTATA
Asta graduata	$\pm 1\text{mm}$	$\pm 1\text{mm}$	600mm
Bilancia	$\pm 1\text{g}$	$\pm 1\text{g}$	2000g

Si deve precisare che si è dovuto scegliere come sensibilità di lettura la sensibilità di misura dell'asta graduata perché lo spessore dell'indice della molla ed il fatto che questo stesso non era mai perfettamente fermo non ha consentito di fare un'interpolazione tra due tacche successive dello strumento in modo da poter avere un errore assoluto massimo a priori minore.

## SCHEMATIZZAZIONE DELL' APPARATO USATO:



## ESECUZIONE DELL'ESPERIENZA:

In laboratorio si è operato in questo modo: come prima cosa si è attaccata la molla A al gancio e si è misurata sull'asta graduata la sua lunghezza a riposo  $L_0$ , poi si è agganciata alla molla una massa alla volta segnando di volta in volta l'allungamento della molla in un'apposita tabella preparata precedentemente. Le masse sono state aggiunte in ordine crescente.

Operando allo stesso modo si sono eseguite le misure per la molla B e poi per la molla C.

Nella seguente tabella sono riportati i valori ottenuti:

Massa $\pm 1$ g	$L_A \pm 1$ mm	$L_B \pm 1$ mm	$L_C \pm 1$ mm
25g	120mm	110mm	74mm
50g	142mm	125mm	75mm
75g	163mm	138mm	77mm
100g	184mm	152mm	79mm
125g	206mm	166mm	81mm
150g	227mm	180mm	84mm
201g	270mm	208mm	88mm
252g	311mm	235mm	92mm

302g	351mm	261mm	96mm
352g	392mm	288mm	101mm
405g	435mm	325mm	105mm
455g	493mm	356mm	109mm

La lunghezza delle molle a riposo viene riportata nella tabella sottostante:

Molla A	Molla B	Molla C
$L_0=100\pm 1\text{mm}$	$L_0=97\pm 1\text{mm}$	$L_0=72\pm 1\text{mm}$

### ANALISI DATI:

Riportando le due serie di dati (massa in ascisse e allungamento in ordinate) su un diagramma cartesiano è possibile ipotizzare che le due grandezze siano correlate, visto che ad occhio i punti tendono a raggrupparsi attorno ad una retta.

La serie di dati riportata in ordinate è data dalla seguente relazione:  $\mathbf{D}x = L - L_0$ .

Per avere il grado di correlazione ci occorre utilizzare il coefficiente di correlazione lineare  $r$  di Bravais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_m) \cdot (y_i - y_m)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2}}$$

Questo parametro può assumere dei valori reali compresi tra  $-1$  ed  $1$  e fornisce la tendenza dei punti, riportati sul grafico, a disporsi lungo una retta.

In particolare se  $|r|=1$  si ha massima correlazione.

Noi abbiamo ottenuto:

$r_A \cong 0,99695$  per la prima serie di dati ed un  $r_B \cong 0,99945$  per la seconda serie di dati ed un  $r_C \cong 0,99962$  per la terza serie di dati.

Siccome le misure effettuate sono  $N^\circ=12$  per ogni serie di dati considerati si può affermare che tra la massa appesa alla molla e l'allungamento della stessa vi sia una correlazione altamente significativa. (Consultare la tabella 6,2 del testo Foti-Gianino).

L'obiettivo è quello di verificare la legge di Hooke:

$$F = K \cdot \mathbf{D}x$$

La forza in questione non è altro che la forza peso, considerando quindi nota l'accelerazione gravitazionale e sapendo che l'allungamento  $\mathbf{D}x$  è pari alla lunghezza dovuta all'applicazione della forza meno il valore della lunghezza della molla a riposo, si può calcolare il coefficiente di elasticità cercato  $K$ .

$$F = K \cdot \mathbf{D}x$$

$$F = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = K \cdot \mathbf{D}x \quad \Rightarrow \quad K = \frac{m \cdot g}{\mathbf{D}x}$$

Per il calcolo degli errori sperimentali sulle misure si è proceduto in questo modo : l'errore che commettiamo sull'allungamento è dato dalla somma degli errori assoluti delle due misure eseguite perché si tratta di una differenza, mentre l'errore associato alla forza è dato dal prodotto dell'accelerazione gravitazionale per l'errore sulla massa.

In definitiva abbiamo:

$$Dx = DL_0 + DL = 1 + 1 = 2mm$$

$$DF = Dm \cdot g = 0,001 \cdot 9,81 = 0,00981 \cong 0,01N$$

Il valore della costante elastica delle due molle si ottiene mediante un best-fit lineare, data la diretta proporzionalità tra  $F$  ed  $Dx$  per l'equazione (1).

I risultati ottenuti: grafici e tabelle, sono riportati di seguito.

Forza $\pm 0,01N$	$X_A \pm 2mm$	$X_B \pm 2mm$	$X_C \pm 2mm$
0,25N	20mm	13mm	2mm
0,49N	42mm	28mm	3mm
0,74N	63mm	41mm	5mm
0,98N	84mm	55mm	7mm
1,23N	106mm	69mm	9mm
1,47N	127mm	83mm	12mm
1,97N	170mm	111mm	16mm
2,47N	211mm	138mm	20mm
2,96N	251mm	164mm	24mm
3,45N	292mm	191mm	29mm
3,97N	335mm	228mm	33mm
4,46N	393mm	259mm	37mm

Riportando i dati in un grafico e unendo i punti sperimentali si ottengono delle rette e ciò che le distingue è la maggiore o minore ripidità, ossia la pendenza, il grafico ottenuto è riportato nella pagina successiva.

I valori delle costanti elastiche sono calcolati mediante un best-fit lineare non pesato, con gli errori associati.

La costante elastica della molla A è dunque:

$$K_A = 0,01165 \pm 0,00006 \frac{N}{mm} .$$

La costante della molla B e quella della molla C sono risultati essere uguale a:

$$K_B = 0,0176 \pm 0,0001 \frac{N}{mm} .$$

$$K_C = 0,1217 \pm 0,0001 \frac{N}{mm} .$$

Dal grafico ottenuto è possibile fare un confronto fra i coefficienti di elasticità delle molle; infatti si vede che a parità di forza si ottiene un allungamento minore nella molla con coefficiente di elasticità più grande, ed un allungamento maggiore nella molla con coefficiente di elasticità più piccolo.

Quindi, ad un alto coefficiente di elasticità corrisponde una molla più rigida.

Per rendere più rigida una molla, si può agire sulle sue caratteristiche:

- Scegliere una sostanza meno elastica.
- Diminuire il numero delle spire.
- Diminuire il diametro delle spire.
- Aumentare la sezione del filo.

Questo è possibile perché il coefficiente di elasticità  $K$  non dipende solo dall'elasticità della sostanza, ma anche dalla forma della molla.

Nella tabella di seguito sono riportate le caratteristiche delle molle in esame:

	Sezione filo	Sezione spire	N° spire	Massa
Molla A	$\Phi=0,70\pm0,05\text{mm}$	$\Phi=20,00 \pm0,05\text{mm}$	29	$M_A=6\pm1\text{gr.}$
Molla B	$\Phi=1,00\pm0,05\text{mm}$	$\Phi=29,80\pm0,05\text{mm}$	23	$M_B=14\pm1\text{gr.}$
Molla C	$\Phi=1,05\pm0,05\text{mm}$	$\Phi=15,15\pm0,05\text{mm}$	30	$M_C=9\pm1\text{gr.}$

Sfruttando in modo conveniente l'apparato in dotazione ho deciso di collegare due delle molle in serie in entrambi i modi possibili, cioè agganciando la 1<sup>a</sup> molla al supporto e la 2<sup>a</sup> alla 1<sup>a</sup> e viceversa.

Ho anche annotato la diversa "lunghezza a riposo" delle due configurazioni, questo sta ad indicare che lo zero del sistema è diverso nelle due configurazioni.

Ho collegato in serie la molla A con la molla B e poi la molla C con la molla B, i dati rilevati sono riportati nella tabella sottostante.

Massa $\pm 1\text{gr.}$	$L_{A+B} \pm 1\text{mm}$	$L_{B+A} \pm 1\text{mm}$	$L_{B+C} \pm 1\text{mm}$	$L_{C+B} \pm 1\text{mm}$
25gr.	294mm	300mm	254mm	231mm
50gr.	329mm	335mm	270mm	247mm
75gr.	365mm	370mm	286mm	268mm
100gr.	400mm	406mm	302mm	279mm
125gr.	436mm	441mm	318mm	294mm
150gr.	471mm	476mm	335mm	310mm

Sistema	Zero ( $L_0$ )
A+B	$259\pm 1\text{mm}$
B+A	$265\pm 1\text{mm}$
B+C	$239\pm 1\text{mm}$
C+B	$218\pm 1\text{mm}$

A pagina seguente sono riportati i grafici con i risultati degli allungamenti in relazione alla forza applicata misurati sperimentalmente in entrambe le configurazioni.

Dai due grafici risulta evidente la diretta proporzionalità tra l'allungamento e la forza, ricaviamo ora la relazione matematica per questo sistema.

Considerando che la forza applicata ad entrambe le molle è la stessa, possiamo scrivere che:

$$F = k_1 \cdot x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{k_1}$$

$$F = k_2 \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{F}{k_2}$$

Sommando membro a membro le due relazioni si ottiene:

$$x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad (*)$$

$$x = F \cdot \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

$$F = \left( \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \right) \cdot x$$

Indicando con  $x$  la somma degli allungamenti delle due molle si è ottenuta la relazione (\*).

Possiamo quindi ricavare la costante di proporzionalità per due molle collegate in serie:

$$K = \frac{1}{\left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)} \quad (2).$$

Viene riportata adesso una tabella in cui figurano anche i valori teorici degli allungamenti ricavati mediante la relazione trovata (2).

Forza $\pm 0,01\text{N}$	$X_{A+B} \pm 2\text{mm}$	$X_{B+A} \pm 2\text{mm}$	$X_{\text{Relazione ricavata}}(2)$
0,25N	35mm	35mm	35,7mm
0,49N	70mm	70mm	69,9mm
0,74N	106mm	105mm	105,6mm
0,98N	141mm	141mm	139,8mm
1,23N	177mm	176mm	175,5mm
1,47N	212mm	211mm	209,7mm

Forza $\pm 0,01\text{N}$	$X_{B+C} \pm 2\text{mm}$	$X_{C+B} \pm 2\text{mm}$	$X_{\text{Relazione ricavata (2)}}$
0,25N	15mm	13mm	16,3mm
0,49N	31mm	29mm	31,9mm
0,74N	47mm	50mm	48,1mm
0,98N	63mm	61mm	63,7mm
1,23N	79mm	76mm	80,0mm
1,47N	96mm	92mm	95,6mm

Il valore della costante delle due molle in serie ricavato utilizzando i valori di  $K_1=K_A$  e  $K_2=K_B$  ricavati con la relazione 2 per le molle A e B con l'errore associato è:

$$K_{\text{relazione 2}} = 0,00701 \pm 0,00011 \text{ N/mm}.$$

Il valore della costante delle due molle collegate in serie, ricavato dal best-fit lineare della prima configurazione(A+B) è:

$$K_{A+B} = 0,00696 \pm 0,00001 \text{ N/mm}.$$

Il valore della costante elastica delle due molle collegate in serie ricavato dal best-fit lineare della seconda configurazione(B+A) è:

$$K_{B+A} = 0,00699 \pm 0,00002 \text{ N/mm}.$$

Risulta evidente che i risultati sono compatibili nei limiti degli errori sperimentali per entrambe le configurazioni considerate, e che questi valori si accordano con quelli ricavati dalla teoria.

Riporto ancora il valore della costante di elasticità  $K$  delle molle in serie B e C ricavato utilizzando i valori di  $K_1=K_B$ ,  $K_2=K_C$  ricavati mediante la relazione 2 con l'errore associato:

$$K_{\text{relazione}} = 0,01538 \pm 0,00012 \text{ N/mm}.$$

Il valore della costante delle due molle collegate in serie, ricavato dal best-fit lineare della prima configurazione(B+C) è:

$$K_{B+C} = 0,01550 \pm 0,00007 \text{ N/mm}.$$

Il valore della costante elastica delle due molle collegate in serie ricavato dal best-fit lineare della seconda configurazione(C+B) è:

$$K_{C+B} = 0,01517 \pm 0,00043 \text{ N/mm}.$$

Anche in questo caso i risultati trovati per le due configurazioni sono compatibili nei limiti degli errori sperimentali tra di loro e si accordano con i risultati ricavati teoricamente.

## TEST DEL $\chi^2$ :

Il test del chi quadro ci permette di decidere se una relazione funzionale approssima statisticamente i punti sperimentali, a tale scopo si costruisce il seguente numero:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i^{teor.} - y_i^{sper.}}{\sigma_i} \right)^2$$

Dove  $n$  rappresenta il numero di punti sperimentali,  $\sigma_i$  l'errore accidentale attribuibile alla singola misura,  $y_i^{sper.}$  il valore sperimentale assunto dalla grandezza  $Y$  in corrispondenza del valore  $x_i$  della grandezza  $X$ , e  $y_i^{teor.}$  il valore teorico previsto con la relazione funzionale scelta.

Tale numero, nel caso in cui le differenze tra valore teorico e sperimentale siano dell'ordine dell'errore accidentale, assumerà un valore approssimativamente uguale al numero  $n$  di misure effettuate. Nei casi in cui  $\chi^2$  assuma valori molto maggiori del numero di misure effettuate si può concludere dicendo che la relazione scelta non è attendibile; viceversa un valore molto prossimo allo zero, da un lato ci informa che i valori sperimentali sono prossimi ai valori teorici e dall'altro che molto probabilmente si sono sovrastimati gli errori sperimentali e che quindi non può essere ottenuta nessuna informazione sulla adattabilità della funzione ai dati sperimentali.

Per eseguire un confronto tra due best-fit relativi a due diverse relazioni funzionali è più utile introdurre il così detto chi quadro ridotto  $\tilde{\chi}^2$ :

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{n - s}$$

Dove  $s$  rappresenta il numero di parametri della relazione funzionale scelta.

Se  $\tilde{\chi}^2 \gg 1$  c'è disaccordo, se  $\tilde{\chi}^2 \cong 1$  c'è buon accordo, se  $\tilde{\chi}^2 \ll 1$  c'è qualcosa di strano, è possibile che si siano sovrastimati gli errori sperimentali.

Nel nostro caso  $n=6$ ,  $s=1$ , e  $\sigma_i=2$  per ogni misura per cui ottengo questi valori di Chi Quadro:

$$\chi^2_{A+B} = 1,904$$

$$\tilde{\chi}^2 = 0,381$$

$$\chi^2_{B+A} = 0,9975$$

$$\tilde{\chi}^2 = 0,1995$$

$$\chi^2_{B+C} = 1,34$$

$$\tilde{\chi}^2 = 0,268$$

$$c^2_{C+B} = 14,79$$

$$\tilde{c}^2 = 2,96$$

I risultati ottenuti mi permettono di dire che ho sovrastimato gli errori sperimentali, se avessi scelto come sensibilità di lettura per l'asta graduata il mezzo millimetro facendo un'interpolazione, avrei un errore sull'allungamento pari ad un millimetro invece che due come in questo caso, che mi farebbero ottenere un valore diverso di chi quadro.

### **CONCLUSIONI:**

In conclusione si può dire che le molle in esame seguono la legge di Hooke entro i limiti degli errori sperimentali da noi considerati per quanto riguarda la prima parte. Per il collegamento delle molle in serie si può concludere dicendo che i valori della costante elastica ricavata mediante il best-fit in entrambe le configurazioni è in accordo con quella ricavata teoricamente entro i limiti degli errori sperimentali sia per le molle A e B sia per le molle B e C, anche se il test del  $\chi^2$  non ci può fornire nessuna informazione sull'adattabilità della relazione (2) ai dati sperimentali per la sovrastima degli errori sperimentali.

### **BIBLIOGRAFIA:**

- A.Foti-C.Gianino: Elementi di analisi dei dati sperimentali, Liguori, Napoli 1999.
- J.R.Taylor: Introduzione all'analisi degli errori, Zanichelli, Bologna 1986.
- R.Ricamo: Guida alle sperimentazioni di fisica, Ambrosiana, Milano 1968.
- E.Perucca: Fisica generale e sperimentale, UTET, Torino.
- F.Tyler: A Laboratory manual of Physics, E.Arnoold, London 1948.
- Scheda Leybold-Heraeus: Esercitazioni di meccanica: legge di Hooke.
- D.E.Roller-R.Blum: Fisica volume I Meccanica Termodinamica Onde, Zanichelli.
- Enciclopedia Generale De Agostini vol.10.
- Grande Enciclopedia della Scienza e della Tecnologia De Agostini.
- Siti Internet su Robert Hooke.
- Lucidi delle lezioni del prof. Foti.

Ringrazio la Dott.sa Giuliana Impellizzeri per la disponibilità e la collaborazione che ha avuto con me ed il mio gruppo di laboratorio (Manlio De Domenico, Rita Agosta e Vincenzo Fisichella) e per gli utili e validi consigli che mi ha dato durante l'esecuzione delle esperienze in laboratorio durante tutto il corso di Laboratorio di Fisica I. Un ulteriore ringraziamento va al sig. Ferlito e sig. Timpanaro per la loro disponibilità e ai ragazzi del 4° anno che ci hanno assistito in laboratorio.

