

# Confronto fra due tecniche per la determinazione del raggio di curvatura di una calotta sferica

Agosta R., De Domenico M., Fisichella V., Garofalo G.

Laboratorio di Fisica Sperimentale dell'Università degli Studi di Catania

Presentiamo i risultati della misura del raggio di curvatura della calotta sferica di un pendolo sferico, ottenuta presso il laboratorio di Esperimentazioni di Fisica I del Dipartimento di Fisica, utilizzando due tecniche diverse al fine di evidenziare l'effettiva validità di entrambe. Nel primo caso abbiamo utilizzato uno sferometro, nel secondo siamo partiti dall'ipotesi che l'accelerazione di gravità terrestre sulla superficie sulla quale è stato svolto l'esperimento sia costante e abbia valore noto, utilizzando la calotta sferica come un pendolo.



Il nostro scopo è quello di utilizzare il periodo di un pendolo sferico (in figura) per misurare il suo raggio di curvatura, non misurabile direttamente se non con l'impiego di uno sferometro. Per rendere questo possibile è necessario imporre l'accelerazione di gravità terrestre costante nel punto in cui svolgiamo l'esperimento e di valore noto. Dall'equazione del periodo  $T$  del pendolo sferico, otteniamo subito l'equazione in funzione di  $T$  per il calcolo del raggio di curvatura  $R$ :

$$R(T) = r + \frac{5}{7} \frac{g}{4\pi^2} T^2 \quad (1)$$

ottenuta a partire dal principio di conservazione dell'energia. Infatti, considerando un punto iniziale  $P$  diverso dal centro della calotta  $C$ , avremo per tale principio che

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (2)$$

dove  $m$  è la massa della sfera,  $g$  l'accelerazione gravitazionale terrestre,  $h$  è la distanza verticale tra i centri di massa della sfera nei punti  $P$  e  $C$ ,  $v$  la velocità traslazionale della sfera e  $\omega$  la sua

velocità angolare e  $I$  il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrale. Poiché la sfera di raggio  $r$  rotola, risulta  $v = \omega r$ ; inoltre per una sfera piena il momento di inerzia è  $I = \frac{2}{5}mr^2$ , che sostituito nella (2) restituisce  $v^2 = \frac{5}{7}(2gh)$ .

Confrontando questa espressione della velocità con quella che si avrebbe per un pendolo semplice di lunghezza  $l = R - r$  (essendo  $R$  il raggio di curvatura della calotta sferica), cioè  $v_p^2 = 2gh$ , appare evidente che la velocità della sfera è  $\sqrt{\frac{5}{7}}$  della velocità della pallina del pendolo semplice e quindi il periodo  $T$  del pendolo sferico sarà

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{R - r}{g}}$$

da cui, dopo qualche semplice passaggio algebrico si ottiene la (1).

## 1 Apparato sperimentale

Il materiale che abbiamo utilizzato consisteva in:

- Calotta sferica di raggio  $R$ ;
- Sferette di piombo, ferro, acciaio, avorio, di raggio  $r$ ;

Indicando con  $s_L$  la sensibilità di lettura, e con  $p$  la portata di uno strumento:

	Timer (s)
$s_L$	0.01
$p$	5999

	Calibro (mm)
$s_L$	0.05
$p$	180

	Sferometro (mm)
$s_L$	0.001
$p$	15

## 2 Misura di $R$ con l'utilizzo del pendolo sferico

L'esperimento consiste nell'aver messo in oscillazione lungo la calotta sferica, una sferetta per contarne il numero di oscillazioni e dunque risalire con queste informazioni al raggio di curvatura  $R$  cercato.

Dalla relazione (1), misurato  $r$  e  $T$  ed assunto noto il valore di  $g$  è possibile risalire al valore di  $R$ .

Il numero delle oscillazioni e il rispettivo periodo viene misurato non a partire dall'istante in cui la pallina rigida viene lasciata oscillare, ma dal momento in cui la pallina ha già compiuto un'oscillazione completa, in modo da ridurre il propagarsi degli errori dovuti al riflesso di accensione e spegnimento del timer.

Abbiamo calcolato quale tra le palline a disposizione in laboratorio (**A**,**B**,**C**) avesse un periodo di oscillazione meno smorzato relativamente al numero di oscillazioni compiute; per tre sferette di avorio, indicando con  $2r$  il diametro di ogni pallina, con  $N$  il numero di oscillazioni prima dello smorzamento totale, con  $T_S$  il periodo dello smorzamento totale e con  $T_S/N$  il periodo dello smorzamento, abbiamo ottenuto i valori riportati nella seguente tabella:

	<b>A</b>
$2r$	$48.25 \pm 0.05$ mm
$N$	34
$T_S$	$40.19 \pm 0.01$ s
$T_S/N$	$1.1820 \pm 0.0003$ s

	<b>B</b>
$2r$	$40.25 \pm 0.05$ mm
$N$	30
$T_S$	$35.90 \pm 0.01$ s
$T_S/N$	$1.1966 \pm 0.0003$ s

	<b>C</b>
$2r$	$22.20 \pm 0.05$ mm
$N$	21
$T_S$	$25.01 \pm 0.01$ s
$T_S/N$	$1.1909 \pm 0.0004$ s

Abbiamo di conseguenza deciso di utilizzare la pallina **A** per il nostro esperimento, e le abbiamo fatto compiere 10 oscillazioni complete per rilevarne il periodo e minimizzare così gli errori casuali.

## 2.1 Misura del periodo

Riportiamo nella tabella che segue i valori del periodo di oscillazione della pallina, ottenuto per 10 oscillazioni complete e nell'ordine in cui sono stati rilevati.

Misura n.	10T(s)	Misura n.	10T(s)	Misura n.	10T(s)
1	12.04	16	11.80	31	12.17
2	12.00	17	11.92	32	12.04
3	11.75	18	11.84	33	12.15
4	12.00	19	11.82	34	11.78
5	11.90	20	12.10	35	12.03
6	11.89	21	11.92	36	12.00
7	11.60	22	11.86	37	11.77
8	12.00	23	12.00	38	12.05
9	12.04	24	11.84	39	11.90
10	11.82	25	11.83	40	11.81
11	12.03	26	11.85	41	12.21
12	12.08	27	11.81	42	12.15
13	11.93	28	12.17	43	12.09
14	11.85	29	12.01	44	11.52
15	11.84	30	11.87	45	12.08

## 2.2 Indicatori statistici

Quelli che seguono sono gli indicatori statistici relativi al periodo di una sola oscillazione del pendolo sferico:

- **Valore minimo:**  $T_{min} = 1.152$  s;
- **Valore massimo:**  $T_{max} = 1.221$  s;
- **Semidispersione massima:**  $\Delta T = 0.034$  s;
- **Media:**  $\bar{T} = 1.193$  s;
- **Scarto quad. medio:**  $\sigma = 1.473 \cdot 10^{-2}$  s;
- **Deviazione standard:**  $\sigma_T = 1.489 \cdot 10^{-2}$  s;
- **Deviazione standard sulla media:**  $\sigma_{\bar{T}} = 2.220 \cdot 10^{-3}$  s;
- **Deviazione sulla deviazione:**  $\sigma_{\sigma} = 1.588 \cdot 10^{-3}$  s.

La migliore stima del periodo risulta quindi:

$$T = 1.193 \pm 0.015 \quad s \quad (3)$$

## 2.3 Test di Chauvenet

Applichiamo il criterio di Chauvenet per verificare la consistenza dei valori  $T = 1.152$  s e  $T = 1.221$  s.

Indicando con  $t\sigma_n$  il valore  $|1.152 - \bar{T}|$ , cioè quante volte la deviazione standard differisce da tale differenza, otteniamo 2.73, che nella **tabella A<sup>1</sup>** riporta una probabilità  $p = 0.9937$ . La probabilità che una misura si trovi al di fuori dell'intervallo  $1.193 \pm 2.73 \cdot \sigma_n$  è  $\bar{p} = 1 - 0.9937 = 0.0063$ .

Poichè  $n \cdot \bar{p} = 0.2835 < 0.5$ , il criterio di Chauvenet ci permette di eliminare questo valore.

Analogamente, procedendo per l'altro valore, otteniamo esito negativo e non possiamo eliminarlo.

<sup>1</sup>Pag. 288, **F.Tyler** - *A Laboratory manual of Physics*, E.Arnould, London.

Adesso i nuovi valori per la media e la deviazione standard sono:

- $\bar{T} = 1.194 \text{ s}$ ;
- $\sigma_n = 0.014 \text{ s}$ .

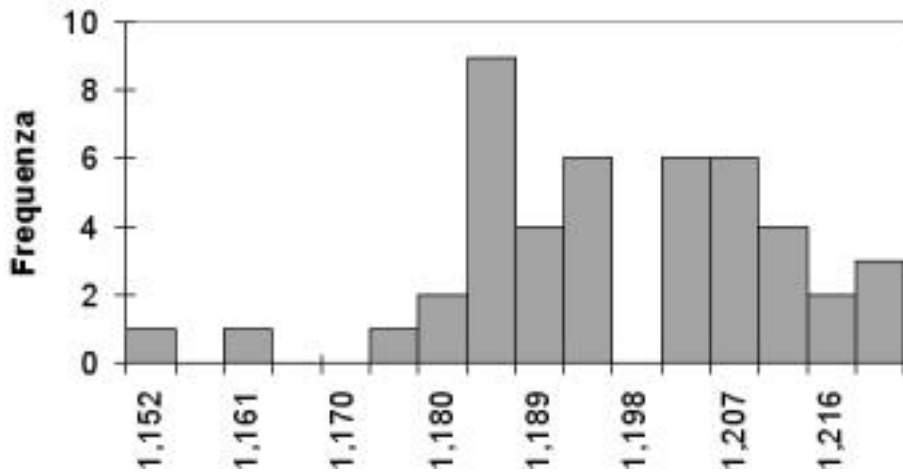
che non sono sensibilmente distanti da quelli trovati in precedenza, dunque non riteniamo necessario eliminare il valore che non ha superato il criterio di Chauvenet.

## 2.4 Diagramma di frequenza

Indicando con  $T' = 10 \cdot T$  il periodo di 10 oscillazioni, le frequenze statistiche rilevate sono riportate nelle seguenti tabelle:

$T'(s)$	$f$	$T'(s)$	$f$	$T'(s)$	$f$
12.04	3	11.93	1	12.17	2
12.00	5	11.85	2	12.01	1
11.75	1	11.84	3	11.87	1
11.90	2	11.80	1	12.15	2
11.89	1	11.92	2	11.78	1
11.60	1	12.10	1	11.77	1
11.82	2	11.86	1	12.05	1
12.03	2	11.83	1	12.21	1
12.08	2	11.81	2		
12.09	1	11.52	1		

L'istogramma della distribuzione delle misure del periodo ottenute è riportato in figura:



## 2.5 Test del $\chi^2$

Applichiamo il test del  $\chi^2$  per verificare che i dati misurati seguono la distribuzione di Gauss, come dovrebbe essere nel caso di errori casuali, dovuti per esempio al tempo di reazione nell'attivare o disattivare il cronometro manuale o alle vibrazioni meccaniche.

Suddividiamo in  $n = 4$  intervalli le misure effettuate, indicando con:

- $\bar{T}$  il valore medio;
- $\sigma_T$  la deviazione standard;
- $k$  il numero associato all'intervallo;
- $T$  la generica misura effettuata;
- $o_k$  il numero di misure che cadono nell'intervallo  $k$ .

$k$	$T$	$o_k$
1	$T \leq \bar{T} - \sigma_T$	5
2	$\bar{T} - \sigma_T < T \leq \bar{T}$	19
3	$\bar{T} < T \leq \bar{T} + \sigma_T$	16
4	$\bar{T} + \sigma_T < T$	5

Indicando con  $p_k$  la probabilità che una misura cada nel  $k$ -esimo intervallo e con  $e_k$  il numero di misure atteso in  $k$  si ha:

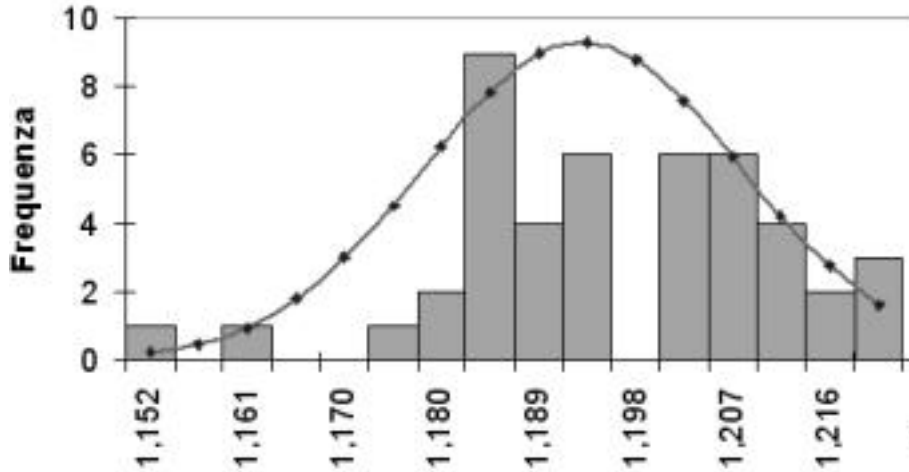
$k$	$p_k$	$e_k$	$o_k$
1	16%	7.2	5
2	34%	15.3	19
3	34%	15.3	16
4	16%	7.2	5

Il  $\chi^2$  è dato dalla relazione

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^4 \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} \quad (4)$$

Quanto riassunto nelle tabelle precedenti e la relazione (4) portano al risultato  $\chi^2 = 2.27 < 4$ .

Il test è risultato positivo e pertanto l'accordo può considerarsi soddisfacente e ne è data una rappresentazione grafica in figura:



## 2.6 Calcolo del raggio di curvatura

Utilizzando il valore noto di  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  e il valore misurato del periodo di oscillazione  $T = 1.193 \pm 0.015 \text{ s}$ , dalla relazione

$$R(T) = r + \frac{5}{7} \frac{g}{4\pi^2} T^2$$

si ottiene il valore

$$R = 276.742 \text{ mm}$$

Il calcolo dell'errore totale assoluto su tale  $R$ , è ricavato dalla relazione sulla propagazione degli errori nelle misure indirette, che in questo caso è

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{5}{7} \frac{g}{2\pi^2} T\right)^2 \cdot \sigma_T^2 + \sigma_r^2}$$

che restituisce  $\sigma_R = 0.03 \text{ mm}$ .

Pertanto la misura del raggio di curvatura della calotta sferica è

$$R = 276.74 \pm 0.03 \text{ mm}$$

## 3 Calcolo con uso dello sferometro

L'altro metodo utilizzato per la misura indiretta del raggio di curvatura della calotta sferica si avvale di uno sferometro. Abbiamo tarato lo strumento,

poggiandolo su un piano di riscontro, ottenendo  $h_0$  pari a  $0.190 \pm 0.001 \text{ mm}$ . Il raggio di curvatura è ricavato dalla relazione:

$$R = \frac{d^2 + h^2}{2h} \quad (5)$$

dove  $a$  è la distanza dalla punta della vite ai tre piedini e  $h$  è l'altezza della vite indicata dallo strumento.

Successivamente abbiamo notato che il centro della calotta sferica presentava alcune imperfezioni, per cui abbiamo utilizzato lo sferometro su un altro punto, rilevando sullo strumento una misura di  $h = 5.375 \pm 0.001 \text{ mm}$ .

Ricordando la taratura, il valore effettivo è  $h = 5.185 \pm 0.001 \text{ mm}$ .

In seguito abbiamo misurato la distanza dalla punta della vite micrometrica ai tre piedini utilizzando un calibro ventesimale ottenendo i seguenti valori:

- $d_1 = 52.60 \text{ mm}$ ;
- $d_2 = 52.65 \text{ mm}$ ;
- $d_3 = 52.65 \text{ mm}$ ;

Abbiamo deciso di utilizzare il valore medio delle tre misure effettuate:  $d = 52.63 \pm 0.014 \text{ mm}$ .

Abbiamo sostituito i valori misurati nella relazione (5) ottenendo

$$R = 269.701 \text{ mm}$$

Essendo quella del raggio una misura indiretta, è necessario calcolare il suo errore dalla legge di propagazione degli errori:

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{d}{h}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \frac{1}{2}\sigma_h^2}$$

ottenendo 0.137. Per cui in definitiva la misura del raggio di curvatura ottenuta con lo sferometro è

$$R = 269.70 \pm 0.14 \text{ mm}$$

Il valore di  $g$ , per il raggio calcolato con lo sferometro è pari circa a  $9.54 \text{ ms}^{-2}$ , e differisce dal valore noto utilizzato nel precedente esperimento di  $0.27 \text{ ms}^{-2}$ . Questa non trascurabile differenza ipotizziamo sia dovuta al fatto che nei nostri calcoli non abbiamo considerato gli attriti radenti e volventi e soprattutto del riscaldamento della superficie di contatto dovuto ad essi. Inoltre la teoria prevede che l'andamento dell'esperienza non dipende dalla massa della pallina, tuttavia questo non è sperimentalmente vero.

## 4 Analisi critica dei risultati

L'esperienza ha dimostrato che i due risultati non sono compatibili entro i limiti degli errori da noi considerati, perchè il valore di  $g$  nel laboratorio dove abbiamo eseguito l'esperienza potrebbe essere diverso da quello utilizzato nei nostri calcoli; perchè la superficie sferica presentava delle imperfezioni; per la presenza di attriti tra la calotta sferica e la pallina utilizzata e tra quest'ultima e l'aria; perchè la pallina percorreva traiettorie ellittiche. La combinazione di tutti questi effetti ha disturbato le nostre misure.

## 5 Bibliografia

- A.Foti e C.Gianino** - *Elementi di analisi dei dati sperimentali*, Liguori, Napoli.  
**W.Maraschini e M.Palma** - *Format: probabilità e statistica*, Paravia, Torino.  
**E.Perucca** - *Fisica Generale e sperimentale*, UTET, Torino.  
**R.Ricamo** - *Guida alle sperimentazioni di Fisica*, Ambrosiana, Milano.  
**J.R. Taylor** - *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli, Bologna.  
**F.Tyler** - *A Laboratory manual of Physics*, E.Arnoold, London.