

Università degli Studi di Catania
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. – Corso di Laurea in FISICA

Tesina di
LABORATORIO DI FISICA I

Il pendolo di torsione

(sezione costante)

Moreno Bonaventura

Anno Accademico 2005/06

Introduzione.

I corpi sottoposti a forze subiscono delle deformazioni.

Se al cessare della forza accade che il corpo riprende la forma originaria, la sostanza di cui è costituito viene definita *elastica*.

Un notevole contributo nello studio dell'elasticità ci è stato fornito da Robert Hook, e dalla sua famosa relazione:

$$x = kF$$

dove x è la deformazione, F la forza e K una costante dipendente dal tipo di sollecitazione, dalla forma geometrica del corpo e dalla sostanza di cui esso è costituito.

In realtà si nota sperimentalmente che la legge di Hook non è sempre valida.

Anche per le sostanze *perfettamente elastiche* esiste un limite di validità della legge detto *limite di elasticità* oltre il quale le deformazioni permangono o non rispettano la legge di Hook, ed il corpo presenta proprietà *plastiche*.

Un ulteriore scostamento dalla legge si verifica nei fenomeni di isteresi elastica.

Questi comportamenti si possono spiegare tenendo conto della struttura microscopica dei corpi.

Le proprietà elastiche o plastiche, nonché il fenomeno della rottura, sono totalmente determinate dalle interazioni (repulsione ed attrazione) tra le molecole e gli atomi che costituiscono i corpi.

Uno dei pendoli di torsione più famosi della storia è la così detta "bilancia di Cavendish", utilizzata per misurare la costante di gravitazione universale.

Descrizione dell'esperimento.

Il pendolo di torsione è costituito da un filo del materiale di cui vogliamo studiare le proprietà elastiche, a cui è fissato un disco o , come nel nostro caso, un cilindro sospeso per il suo centro.

Ruotando il cilindro di un angolo θ intorno all'asse verticale, il filo si torce sotto l'azione di un momento M .

Corrispondentemente il filo reagisce con un momento elastico $-M$.

Rilasciando il corpo, esso inizia ad oscillare con rotazioni sul piano orizzontale sotto l'azione del momento elastico $-M$.

Sono stati sottoposti allo studio 4 pendoli di torsione con lunghezza del filo variabile, ma dello stesso materiale e con sezione costante.

Presupposti Teorici.

Per rotazioni tali da non superare il limite di deformazione, il momento torcente M risulta proporzionale allo spostamento angolare θ , cioè:

$$M = c\theta \quad (1)$$

Questa è la legge di Hook in forma “rotazionale”, e c viene chiamata costante di torsione del filo.

Per un filo di sezione r e lunghezza L si vede sperimentalmente che:

$$\theta = \frac{1}{K} \frac{ML}{r^4} \quad (2) \quad \text{Dalla (1) e (2) abbiamo che: } c = K \frac{r^4}{L}$$

Cioè la costante c (dipendente dalla forma e dalle proprietà del corpo in esame) può essere espressa in funzione di un'altra costante K , detta *modulo di torsione* e dipendente solo dalla sostanza di cui è costituito il filo.

Applicando il teorema del momento della quantità di moto al cilindro sospeso che ruota sotto l'azione del momento $-M$ abbiamo che:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -M$$

Dove J è il momento d'inerzia del cilindro.

Introducendo in questa equazione il valore di M ricavato dalla (2) abbiamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Kr^4}{JL} \theta$$

Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine del tipo $\ddot{x} = -\omega^2 x$

con $\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}$ e dove x è funzione del tempo.

Questo tipo di equazioni sono caratteristiche del moto armonico, e ω rappresenta la pulsazione del moto.

Indicando con T il periodo, si ha che:
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2 LJ}{r^4 T^2} \quad (3)$$

Nella presa dati è stato misurato il tempo di 10 oscillazioni cioè: $t = 10T$

Introducendo il valore di T nella (3) e sostituendo $r = d/2$ abbiamo:

$$K = \frac{6400 \pi^2 LJ}{d^4 t^2} \quad (3') \quad \text{che utilizzeremo per il calcolo di } K.$$

Ricordiamo inoltre che, per il cilindro da noi utilizzato, il momento d'inerzia è dato da:

$$J = m \cdot \left(\frac{l^2}{12} + \frac{D^2}{16} \right) \quad \text{dove } l \text{ è la lunghezza del cilindro, } D \text{ il suo diametro e } m \text{ la massa.}$$

Obiettivi dell'esperimento.

L'esperienza ha lo scopo di calcolare il valore del modulo di torsione K dei fili utilizzati (che dovrebbe essere lo stesso per tutti e quattro) e di verificare la relazione lineare tra il quadrato del periodo di oscillazione t^2 e la lunghezza L del filo.

Apparato sperimentale.

Il nostro apparato sperimentale è costituito da un supporto di metallo su cui sono fissati con dei morsetti 4 pendoli di torsione.

Sul lato destro della struttura di sostegno, è stato aggiunto uno spessore di nastro isolante per ripristinare l'orientamento orizzontale dell'asse a cui sono appesi i pendoli.

A causa del cattivo posizionamento del sostegno orizzontale, i fili subiscono una torsione per i primi 4 cm circa dal morsetto.

Questo elemento non è sicuramente trascurabile, anzi introduce un errore sistematico di cui dovremo tener conto durante l'analisi dei risultati.

Caratteristiche degli strumenti utilizzati.

Per misurare la lunghezza del filo è stato utilizzato un metro estensibile con sensibilità di misura di 1 mm, per cui le misure di lunghezza saranno affette da un errore massimo a priori di tale entità.

Per i tempi si è fatto uso di un cronometro automatico digitale, collegato ad un contatore di oscillazioni, con sensibilità di lettura e di misura di 0,01 s.

Il diametro dei fili è stato misurato con il palmer (sensibilità di misura 0,01 **mm**), mentre quello dei cilindri con il calibro (sensibilità di misura 0,005 **cm**) .

E' stato anche necessario l'uso di una livella.

Organizzazione dell'esperimento.

Dopo aver ripristinato il sostegno destro ed aver controllato con la livella la corretta posizione dell'asse orizzontale, è stata eseguita la misurazione della lunghezza del primo filo.

Tale distanza è stata presa dalle estremità dei morsetti, poiché è solo in questa zona che avviene la torsione.

Successivamente si è passato alla misurazione del diametro del filo, dei cilindri, e dei tempi di 10 oscillazioni.

Si è ripetuto il procedimento anche per gli altri fili.

Si è scelto di ruotare i cilindri di angoli di circa 90° per essere sicuri di non oltrepassare il limite di deformazione elastica dei fili stessi, e per evitare errori del contatore di oscillazione dovuti ad ulteriori passaggi del cilindro davanti alla fotocellula.

Inoltre, sebbene il periodo sia indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni, è stato usato sempre lo stesso angolo per cercare di rendere equivalente il fenomeno osservato.

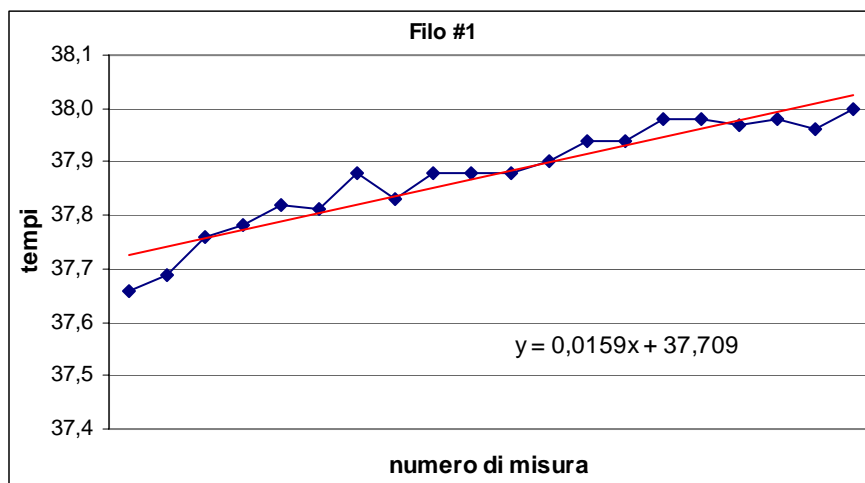
Durante l'esecuzione dell'esperimento si è prestata attenzione al fatto che il nastro isolante non scivolasse giù lungo la sbarra di sostegno.

Dati raccolti.

Lunghezza cilindri	19,9 cm	$\pm 0,1 \text{ cm}$
Diametro cilindri	2,200 cm	$\pm 0,005 \text{ cm}$
Massa cilindri	0,545 kg	Valore indicato sul cilindro
Diametro fili	0,69 mm	$\pm 0,01 \text{ mm}$

Tempi di 10 oscillazioni (rigorosamente in ordine temporale):

Filo 1 L=31,2 cm	Filo 2 L=38,0 cm	Filo 3 L=52,5 cm	Filo 4 L=67,8 cm
periodo T (s)	periodo T (s)	periodo T (s)	periodo T (s)
37,66	41,68	48,98	55,20
37,69	41,71	48,99	55,45
37,76	41,71	48,97	55,26
37,78	41,67	49,00	55,58
37,82	41,71	49,01	55,63
37,81	41,75	48,83	55,58
37,88	41,69	49,01	55,48
37,83	41,70	49,05	55,51
37,88	41,75	49,04	55,54
37,88	41,72	49,05	55,48
37,88	41,73	49,04	55,41
37,90	41,75	49,04	55,59
37,94	41,74	49,05	55,48
37,94	41,72	49,05	55,51
37,98	41,73	49,03	55,34
37,98	41,78	49,07	55,46
37,97	41,76	49,03	55,47
37,98	41,77	49,06	55,46
37,96	41,75	49,04	55,37
38,00	41,77	49,05	55,56



Guardando il grafico temporale del primo filo (così come per gli altri tre) è evidente un *aumento del periodo di oscillazione* con il susseguirsi delle misurazioni. Inoltre dal grafico 3 (vedi allegato) si può ipotizzare una riduzione di tale fenomeno con

l'aumentare della lunghezza del filo.

Questo fenomeno è inaspettato e merita la nostra attenzione.

Innanzitutto individuamo le possibili cause:

- Malfunzionamento del cronometro.
- La rotazione del cilindro non è sempre la stessa.
- Alterazione dell'ambiente esterno.
- Alterazione dell'apparato sperimentale.

Il motivo che personalmente considero più probabile è proprio quest'ultimo.

L' aumento del periodo di rotazione potrebbe essere dovuta ad un cedimento dei morsetti, o più probabilmente ad un cedimento del filo stesso, provocato dalla sua non perfetta elasticità.

Le ripetute torsioni, col passare del tempo, possono aver "ammorbidito" il materiale riducendo il suo modulo di torsione.

Inoltre, trattandosi di un metodo di misurazione dinamico, il filo è anche soggetto ad un aumento di temperatura, non stimato, ma che riteniamo comunque trascurabile.

Vediamo gli effetti di questo fenomeno sull'analisi dei dati raccolti.

Analisi dei dati.

Calcoliamo la media e la deviazione standard del periodo di oscillazione per ogni gruppo di misure.

	Media	Deviazione standard
Filo 1	37,8 s	0,1 s
Filo 2	41,73 s	0,03 s
Filo 3	49,02 s	0,05 s
Filo 4	55,4 s	0,1 s

Applicando il criterio di Chauvenet possiamo eliminare il 48,83 preso sul terzo filo, nonché il 55,20 e il 55,26 presi sul quarto filo.

Ricalcoliamo quindi la media e la deviazione standard, ed effettuiamo un ulteriore controllo con il criterio di Chovenet. In definitiva otterremo i seguenti valori:

	Media	Deviazione standard
Filo 1	37,8 s	0,1 s
Filo 2	41,73 s	0,03 s
Filo 3	49,03 s	0,03 s
Filo 4	55,50 s	0,08 s

Gli istogrammi allegati, relativi ai set di misure, mostrano che la distribuzione non può essere sempre ricondotta a quella gaussiana.

Una somiglianza con la distribuzione normale è riscontrabile nell'ultimo set di misure.

Dal quarto al primo campione la distribuzione tende invece a diventare più uniforme e ciò può dipendere dall'aumento del periodo di rotazione, che appunto tende a ridursi dal primo al quarto campione.

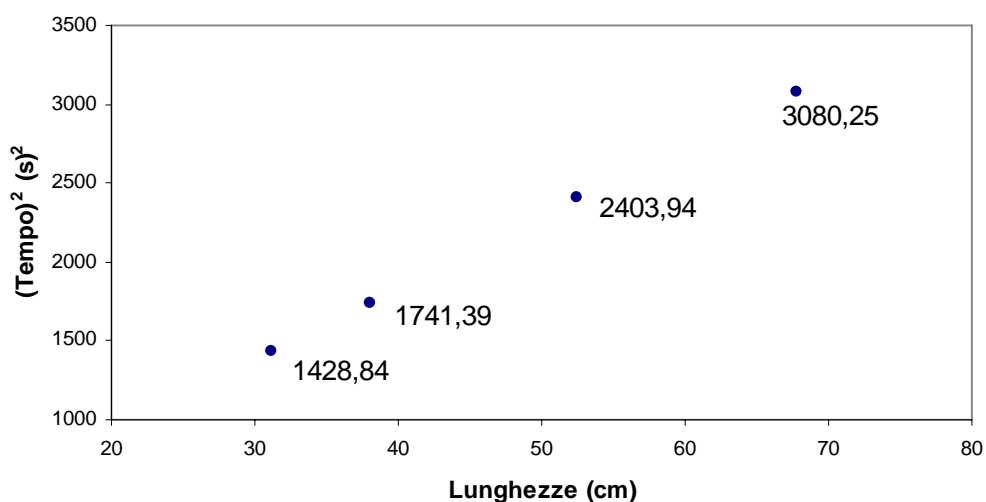
Dilatazione dei tempi di rotazione e conseguente distribuzione non gaussiana, sono due fattori che non ci permettono di svolgere una corretta analisi statistica dei dati e che limitano la validità dei risultati.

Continuiamo comunque lo studio dei dati verificando la relazione lineare tra T^2 e L e passando poi al calcolo del modulo di torsione.

Nelle conclusioni terremo presente i due importanti fattori sopra citati, ed eventualmente valuteremo come essi abbiano influenzato l'esperimento.

Rappresentazione grafica delle grandezze e coefficiente di Bravais-Pearson.

Rappresentazione dei dati



Il grafico mostra un approssimativo allineamento dei punti e possiamo quindi ipotizzare una relazione lineare tra le lunghezze dei fili ed i quadrati dei tempi di oscillazione.

Verifichiamo la linearità calcolando il coefficiente di Bravais-Pearson.

$$r_m = \frac{\sum_{i=1}^4 (L_i - L_m) \cdot (T_i^2 - T_m^2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 (L_i - L_m)^2 \cdot \sum_{i=1}^4 (T_i^2 - T_m^2)^2}} = 0,999 .$$

Dove L_m e T_m^2 sono rispettivamente i valori medi delle lunghezze e dei quadrati dei periodi.

Il valore di r , nonostante l'esiguo numero di punti, è indice di una buona correlazione tra le grandezze prese in esame.

Stima del modulo di torsione.

Abbiamo precedentemente osservato che:
$$K = \frac{6400\pi^2 J}{d^4 t^2} L \quad (3')$$

cioè una relazione lineare del tipo: $T^2 = a \cdot L_{filo}$

Tuttavia il calcolo di "a", e quindi del relativo modulo di torsione k , non può essere eseguito con il metodo del best-fit.

L'ipotesi di tale metodo è infatti che gli errori relativi delle grandezze in ascissa siano molto minori

degli stessi riferiti alla corrispondente grandezza in ordinata, ovvero:
$$\frac{\Delta L_i}{L_i} \ll \frac{\Delta T_i^2}{T_i^2}$$

La seguente tabella mostra che tale ipotesi non è soddisfatta.

	Filo 1	Filo 2	Filo 3	Filo 4
$\frac{\Delta L_i}{L_i} 100$	0,32	0,26	0,19	0,14
$\frac{\Delta T_i^2}{T_i^2} 100$	0,52	0,14	0,12	0,28
	$\frac{\Delta L_i}{L_i} < \frac{\Delta T_i^2}{T_i^2}$	$\frac{\Delta L_i}{L_i} > \frac{\Delta T_i^2}{T_i^2}$	$\frac{\Delta L_i}{L_i} > \frac{\Delta T_i^2}{T_i^2}$	$\frac{\Delta L_i}{L_i} < \frac{\Delta T_i^2}{T_i^2}$

Non potendo utilizzare il metodo del best-fit, calcoleremo k direttamente dalla formula (3'):

$$K = \frac{6400\pi^2 LJ}{d^4 t^2} \quad (3')$$

e otterremo la sensibilità di misura del modulo di torsione differenziando logicamente la (3').

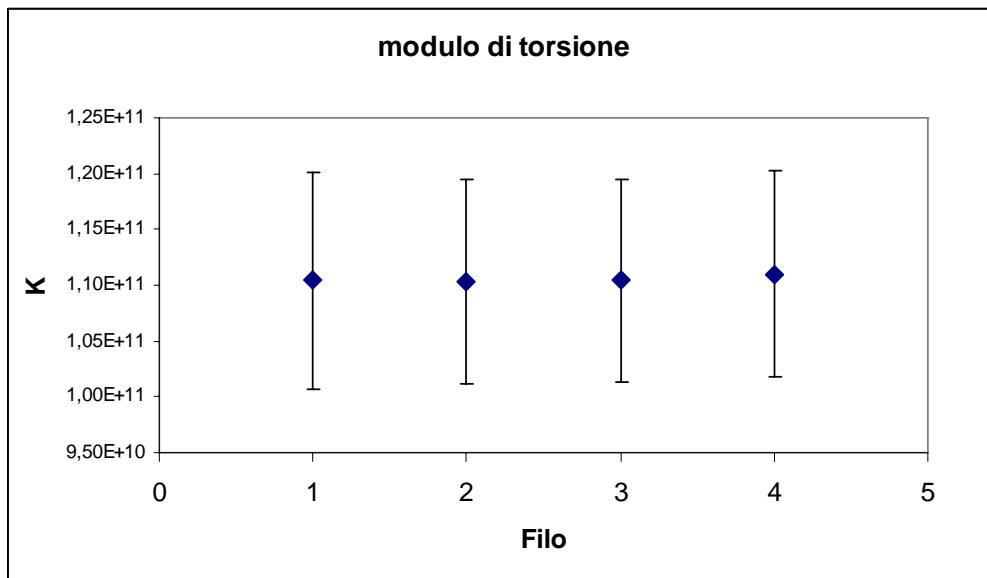
Avremo quindi che:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta J}{J} + 4 \frac{\Delta r}{r} + 2 \frac{\Delta t}{t} \quad \text{dove} \quad \frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta l}{l} + 2 \cdot \frac{\Delta D}{D}$$

Con gli opportuni calcoli risulta:

K filo 1=	$1,10 \cdot 10^{11}$ [N m ⁻²]	errore % su K ₁	8,74 %
K filo 2=	$1,10 \cdot 10^{11}$ [N m ⁻²]	errore % su K ₂	8,30 %
K filo 3=	$1,10 \cdot 10^{11}$ [N m ⁻²]	errore % su K ₃	8,20 %
K filo 4=	$1,11 \cdot 10^{11}$ [N m ⁻²]	errore % su K ₄	8,33 %

Osserviamo, con l'aiuto del seguente grafico, che le quattro costanti risultano uguali entro gli errori sperimentali.



Confronto con la teoria e considerazioni finali.

Il valore noto di K per l'acciaio (circa $1,2 \cdot 10^{11}$) non è in accordo con quelli calcolati con la (3'). Questo può dipendere da molteplici fattori.

Innanzitutto, pur trattandosi sempre di acciaio, esistono diverse leghe o metodi di lavorazione che modificano le proprietà del materiale.

L'acciaio da noi studiato potrebbe essere diverso da quello utilizzato per il calcolo del $1,2 \cdot 10^{11}$.

L'usura, le vistose deformazioni del filo e la torsione causata dal cattivo posizionamento dell'asse orizzontale, sono ulteriori fattori che intervengono nell'esperimento ma che non sono valutati nello studio teorico del fenomeno.

Nota positiva è l'accordo mostrato tra le costanti dei vari fili.

A limitare la validità di tale risultato vi è però la mancata distribuzione gaussiana dei tempi di oscillazione.

In tali condizioni, infatti, la media e la deviazione standard perdono il loro significato statistico-fisico e restano semplicemente una serie di calcoli matematici.

Per il futuro è quindi essenziale concentrare l'attenzione verso lo studio della dilatazione dei tempi di rotazione.

A questo proposito potrebbe risultare utile raccogliere un numero maggiore di tempi sul singolo filo, o variare l'angolo di torsione.

Un semplice, nonché economico, miglioramento da apportare all'apparato sperimentale potrebbe essere il ripristino del corretto posizionamento dell'asse orizzontale.

Bonaventura Moreno

matricola: 665/000408

13-07-2006

Email: moreno.bonaventura@katamail.com

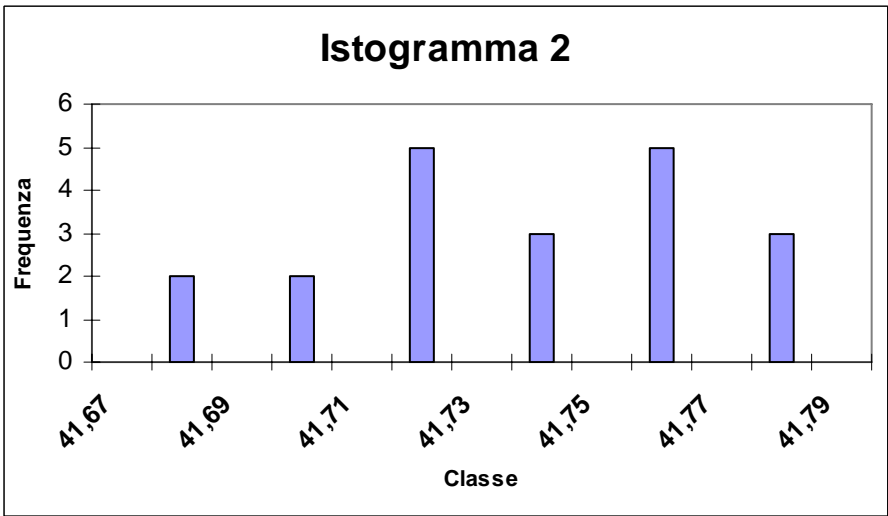
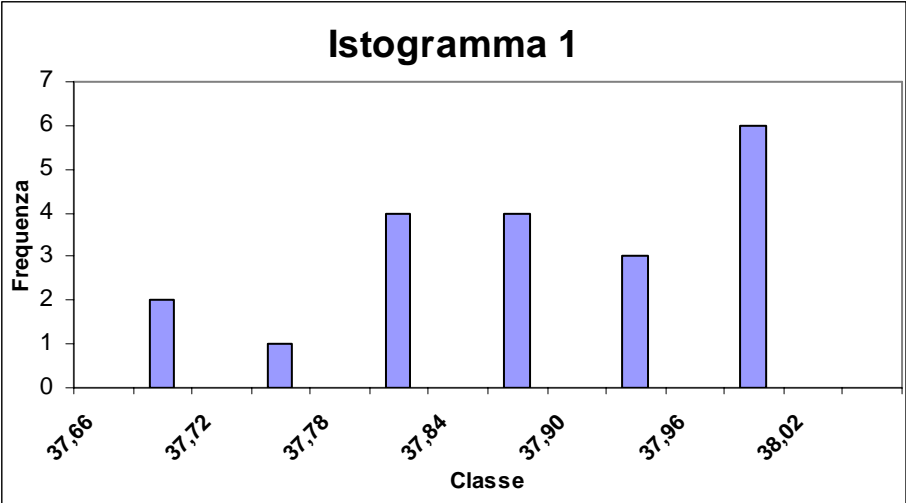
Bibliografia.

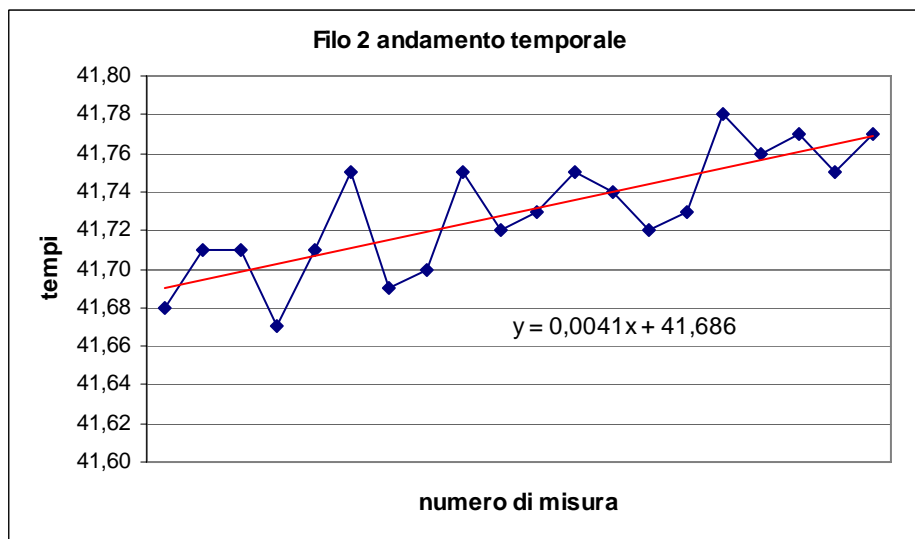
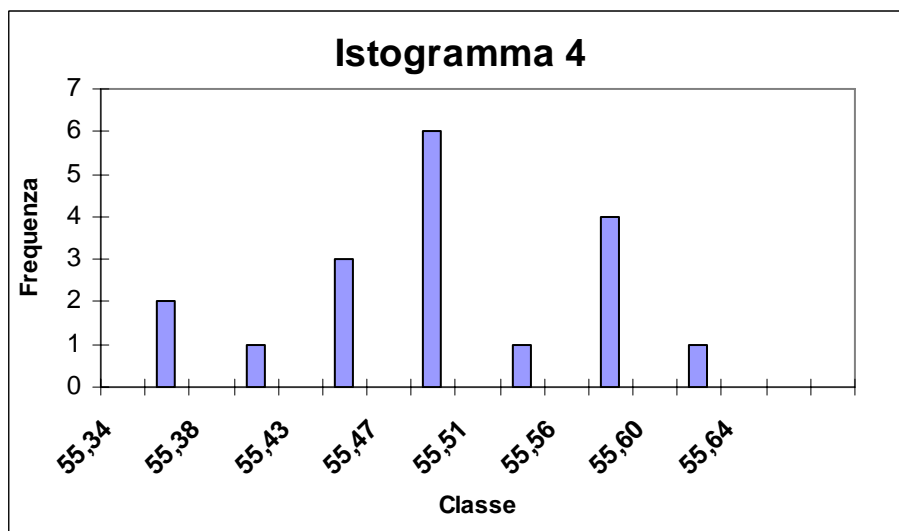
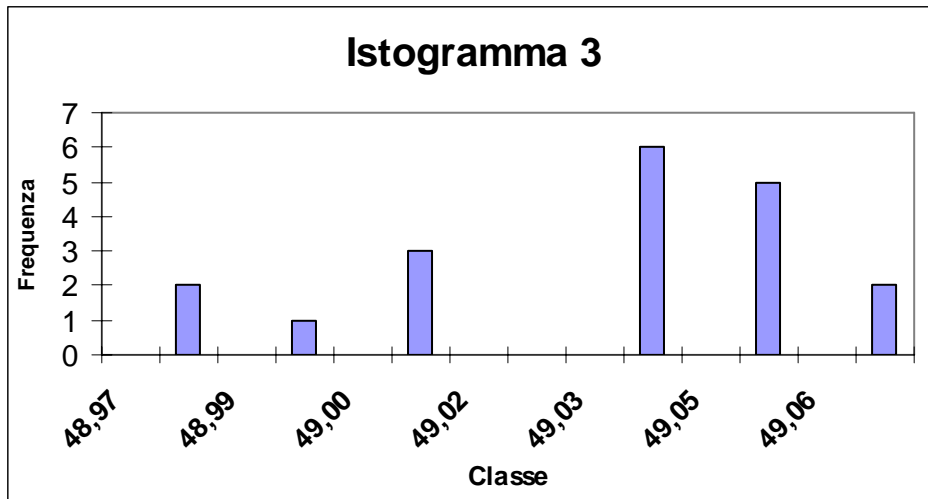
www.google.it

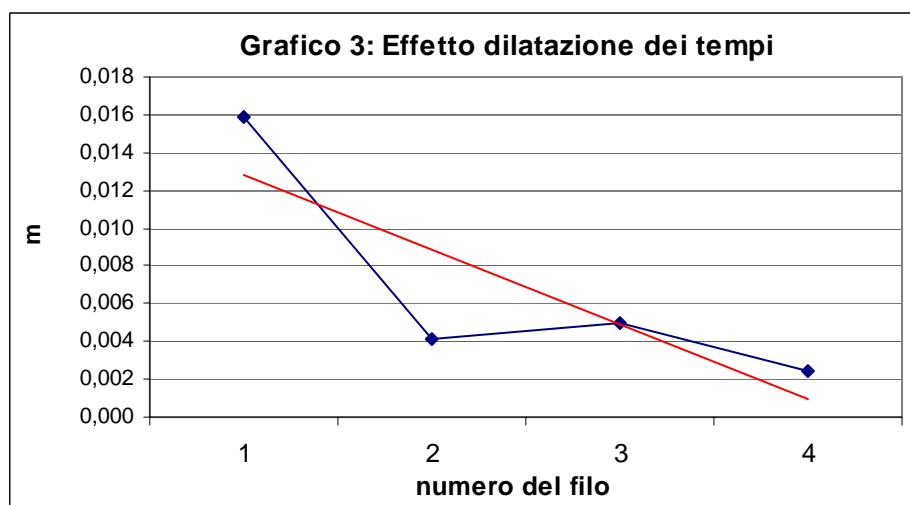
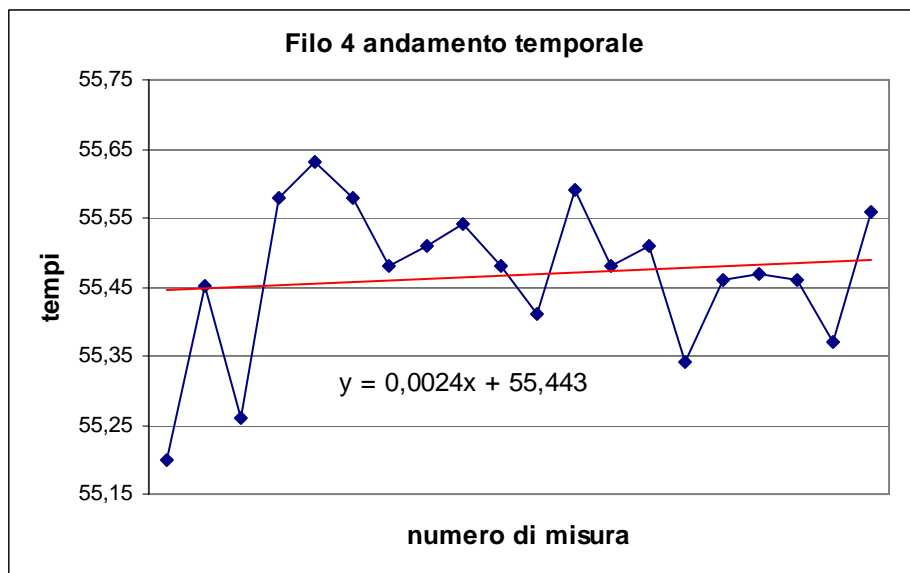
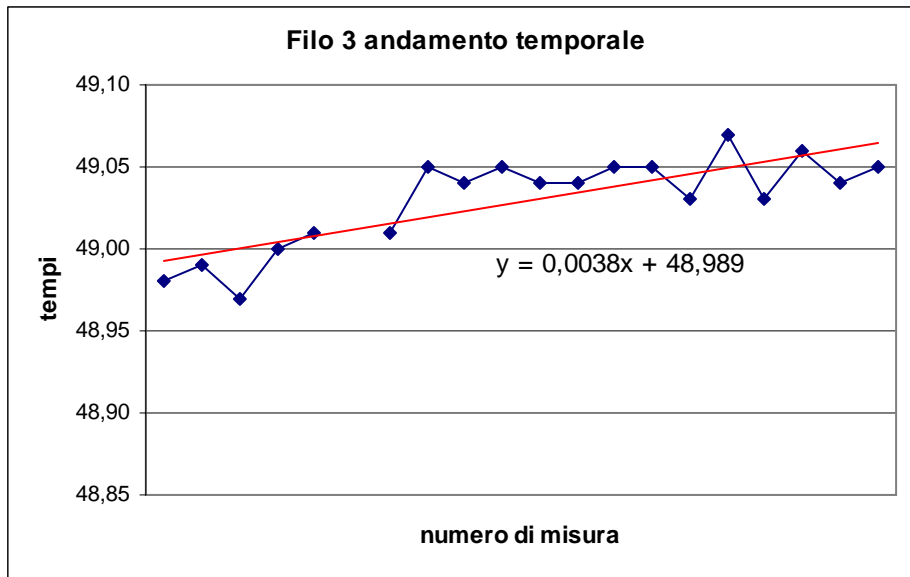
<http://it.wikipedia.org>

A.Foti, C.Gianino Elementi di analisi dei dati sperimentali.

R. Ricamo Guida alle sperimentazioni di Fisica I.







dove **m** è coefficiente angolare della linea di tendenza dei grafici temporali.