

LABORATORIO DI FISICA II CORSO A-L

Università degli studi di Catania

Facoltà di Scienze

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Giuglielmo Garofalo

Determinazione della curva di risonanza di un circuito LC parallelo

➤ Introduzione e cenni teorici

La distribuzione dell'energia elettrica dalle centrali alle nostre case, le comunicazioni radio e quelle telefoniche, la riproduzione sonora, la televisione sono possibili grazie all'uso di correnti elettriche non costanti nel tempo.

Si chiama corrente alternativa una corrente $I(t)$ funzione periodica del tempo.

Si può dimostrare che una qualsiasi funzione periodica del tempo può essere espressa mediante una serie di funzioni sinusoidali del tempo, detta serie di Fourier. Si può dimostrare, anche, che una qualsiasi funzione non periodica del tempo può essere espressa mediante un integrale di funzioni, detto integrale di Fourier. È importante, allora, lo studio dei circuiti elettrici quando vengono attraversati da correnti funzioni sinusoidali del tempo, dette anche correnti alternate, perché da esso si possono trarre informazioni.

Esiste una perfetta analogia formale fra i campi elettrici e le deformazioni elastiche e fra i campi magnetici ed i fenomeni reattivi di inerzia. È noto d'altra parte che le deformazioni elastiche hanno l'attitudine di accumulare energia potenziale mentre i fenomeni di inerzia hanno l'attitudine di accumulare energia cinetica; si deduce che mettendo a contrasto un corpo elastico con una massa d'inerzia, si costituisce un sistema in cui può realizzarsi una trasformazione alterna di energia da potenziale a cinetica e viceversa; ne risulta quindi un sistema oscillante e cioè suscettibile di entrare in oscillazione libera tutte le volte che venga solo distolto dalla sua naturale posizione di riposo e poi abbandonato. Il sistema più semplice che realizza queste condizioni si ottiene ad esempio vincolando una sfera pesante all'estremità di un'asta elastica rigidamente infissa all'estremità opposta.

Se si inflette la molla, la molla stessa viene a trovarsi in uno stato forzato e sviluppa delle reazioni elastiche che tendono a riportarla alla sua naturale posizione di riposo. Se la molla viene abbandonata, la sfera ripassa così dalla sua posizione di riposo con la massima velocità, avendo accumulato in se, allo stato di energia cinetica, quella che era prima energia potenziale della molla inflessa. La molla viene perciò ad inflettersi in verso opposto: supponendo tutte le resistenze passive ridotte a zero si avrebbe il trasferimento integrale dell'energia cinetica della sfera allo stato di energia potenziale della molla, la quale verrebbe ad assumere così un grado di deformazione perfettamente simmetrico a quello iniziale. Questo modello meccanico consente di concepire immediatamente un circuito elettrico che riveli un comportamento formalmente identico: basta sostituire all'energia potenziale della molla, l'energia potenziale di un campo elettrico e all'energia cinetica della sfera, l'energia cinetica o intrinseca di una corrente. Si devono quindi accoppiare e porre in contrasto un condensatore e una induttanza, che assieme costituiscono un *circuito LC*, caso particolare ed ideale (Resistenza nulla) del *circuito RLC*.

Consideriamo un circuito come quello mostrato in figura 1.

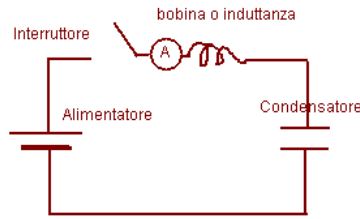
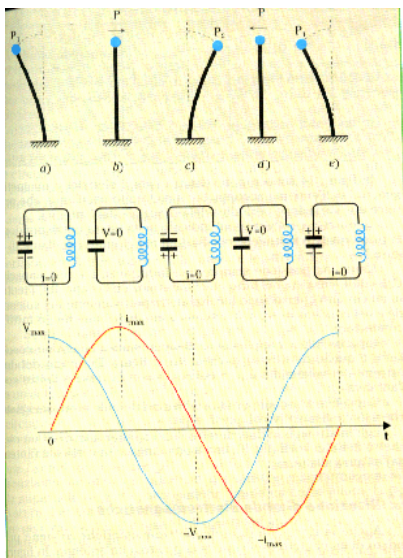


figura 1

Il funzionamento del sistema appare del tutto evidente. Si supponga prima, di chiudere per un istante l'interruttore: chiamando ΔV la f.e.m. dell'alimentatore, questa promuove una corrente di carica del condensatore, la quale si arresta quando fra le armature si è stabilita una differenza di potenziale ΔV . Nel campo elettrico del condensatore si accumula allo stato potenziale una quantità di energia $W = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$. Si chiuda ora l'interruttore e si abbandoni il sistema a se stesso: le reazioni dielettriche del condensatore carico tendono a ricondurlo allo stato di riposo, promuovendo una corrente di scarica attraverso l'induttanza. A questa corrente si contrappone immediatamente la f.e.m. di autoinduzione, la quale impedisce la scarica istantanea, obbligando la corrente di scarica a stabilirsi gradualmente. Questo perché, come ricorda la Legge di Lenz, il verso della corrente indotta è tale da opporsi a mezzo del campo magnetico da essa prodotto alla causa che ha determinato la corrente. Così, mentre il campo elettrico del condensatore si va gradualmente estinguendo, si costituisce attorno all'induttanza un campo magnetico crescente, nel quale si va accumulando, sotto forma di energia intrinseca o elettrocinetica della corrente, l'energia potenziale che si libera dal campo elettrico: quando la tensione alle armature si è ridotta a zero, il campo elettrico ha restituito tutta l'energia potenziale che gli era stata comunicata; se i fenomeni dissipativi sono ridotti a zero (circuiti a resistenza nulla) la stessa quantità di energia si trova integralmente trasferita al campo magnetico $W = \frac{1}{2} L(I_m)^2$.



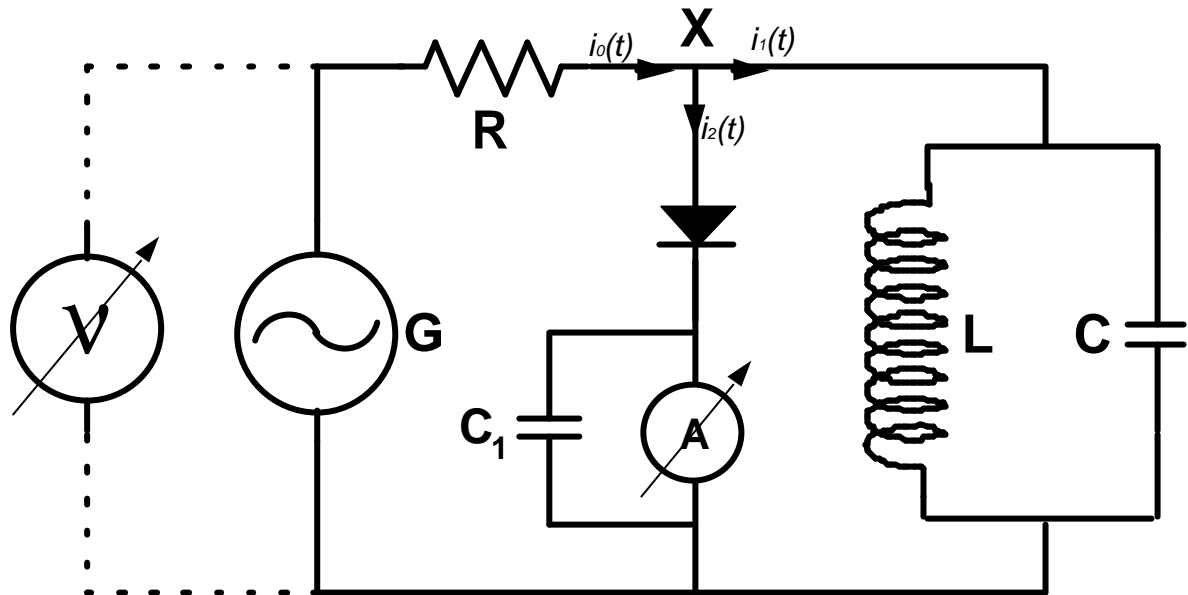
Da questo istante la corrente comincia a diminuire, ma si origina però una f.e.m. di autoinduzione che la conserva fino a quando non si è verificata la restituzione integrale dell'energia intrinseca che vi è connessa; questa permanenza della corrente, determina così la carica del condensatore nel verso opposto al precedente, e avendo supposto i fenomeni dissipativi nulli, esso è condotto a raggiungere uno stato di carica perfettamente simmetrico al precedente. In questo istante la corrente che circola nel circuito è nulla, ma si inizia una nuova scarica, la quale si compie con le vicende identiche, conservando il circuito in regime di *oscillazioni libere persistenti*. L'analogia formale di comportamento fra il circuito elettrico ed il modello meccanico è quindi perfetta (figura a lato).

Il sistema costituito da una induttanza e da una capacità accoppiate fra di loro a formare una maglia chiusa, prende il nome di *circuito oscillante o risonante*. La frequenza propria di oscillazione del circuito viene detta anche *frequenza di risonanza* e risulta inversamente proporzionale alla radice quadrata del prodotto dei due valori della induttanza e della capacità.

➤ Obiettivo dell'esperienza.

L'obiettivo di tale esperienza è quello di tracciare la curva di risonanza, I_2 in funzione di f , individuare il valore della frequenza di risonanza f_0 , e determinare il coefficiente di autoinduzione L dalla relazione: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Il circuito preso in esame è un circuito LC parallelo come quello mostrato sotto:



➤ Apparato sperimentale.

1. Generatore di funzioni.
2. Frequenzimetro.
3. Microamperometro.
4. Induttanza: $L = 2,87 \pm 5\%$.
5. Diodo usato come raddrizzatore di corrente.
6. Resistenza: $R=470\Omega$.
7. Condensatore: $C_1=2\text{nF}$.
8. Condensatore: $C=330\text{nF}$.

➤ Descrizione dell'esperienza.

Nel nodo X la corrente $i_0(t)$ si divide in $i_1(t)$, che passa attraverso il circuito LC in oggetto, e $i_2(t)$ che attraversa l'amperometro A. Tutte e 3 queste correnti variano nel tempo con legge sinusoidale del tipo $i_n(t) = I_n \sin(2\pi n t + j_n)$ con $n=(0,1,2)$.

E in ogni istante sussiste sempre la relazione $i_1(t) + i_2(t) = i_0(t)$ e tra le loro ampiezze sussiste sempre la relazione $I_0 = I_1 + I_2$.

L'esperienza prevede la variazione della frequenza del generatore G fino ad arrivare ad una frequenza di qualche decina di KHz pertanto non è possibile utilizzare un classico amperometro per correnti alternate essendo questo tarato per frequenze di rete (circa 50Hz); il diodo ed il condensatore hanno il compito di raddrizzare la corrente in modo da poter utilizzare un amperometro in corrente continua. Si nota inoltre che lo strumento di misura non è posto in modo da misurare direttamente la corrente I_1 , il motivo di tale scelta è dovuto proprio allo strumento di misura: nella regione di frequenze attorno alla frequenza di risonanza, l'ampiezza della corrente raggiunge valori molto piccoli, ciò dal punto di vista strumentale significherebbe

leggere i valori sulla parte inferiore della scala dello strumento, regione in cui l'errore relativo che si commette è maggiore rispetto a quello che si commette sulla seconda metà della scala. Pertanto non conviene misurare direttamente l'ampiezza I_1 della corrente $i_1(t)$ ma quella, I_2 , della corrente $i_2(t)$. Infatti, se si ha l'accortezza di fare in modo che l'ampiezza della corrente $i_0(t)$, I_0 , non vari al variare della frequenza, allora I_0 è una costante e $I_2=I_0-I_1$ varierà con la frequenza con andamento esattamente inverso a I_1 . I_2 presenterà quindi una curva di risonanza con un *massimo* per $v=v_0$, come in un circuito RLC serie. Sebbene ribaltata, la curva rilevata misurando I_2 avrà la stessa forma di I_1 e presenterà il suo massimo in corrispondenza dello stesso valore di (v) per il quale I_1 avrebbe presentato il suo minimo.

Inoltre è sempre indispensabile usare lo stesso strumento di misura e non cambiare le diverse portate dello strumento onde evitare variazioni dell'impedenza del circuito. Detto ciò passo al rilevamento della suddetta corrente al variare della frequenza preoccupandomi, di volta in volta, che il valore della tensione applicata all'ingresso resti costante ad un valore, da me fissato, di $1,0\pm 0,1V$ di modo che la corrente massima che devo misurare non vada oltre il fondoscala del microamperometro.

Fatto questo l'esperienza è conclusa, riporto in tabella i valori che ho rilevato.

➤ Tabella.

Valori sperimentali		
$V= 1,0\pm 0,1V$		
N° misura	Frequenza (?) $\pm 1Hz$	Corrente (I_2) $\pm 0,5\mu A$
1	1420	19,0
2	2170	27,0
3	2686	36,0
4	3126	46,0
5	3486	56,0
6	3831	66,0
7	4111	75,0
8	4566	87,0
9	4619	88,0
10	4677	89,0
11	4725	90,0
12	4800	91,0
13	4873	92,0
14	4925	93,0
15	5048	94,0
16	5263	95,0
17	5460	94,0
18	5591	93,0
19	5700	92,0
20	5763	91,0
21	5831	90,0
22	5897	89,0
23	6114	85,0

N° misura	Frequenza (?) ±1Hz	Corrente (I ₂) ±0,5μA
24	6517	75,0
25	6908	65,0
26	7561	50,0
27	9221	25,0
28	10428	15,0

➤ Analisi Dati.

Dal grafico precedente si evince che si ottiene la massima corrente di $95 \pm 0,5 \mu A$ alla frequenza $\omega = 5263 \text{ Hz}$, questa è la frequenza di risonanza del circuito.

Noti i valori di frequenza di risonanza e di capacità si può trovare il coefficiente di

autoinduzione L dalla relazione:
$$L = \frac{1}{4\omega^2 n_0^2 C}.$$

Considerando la frequenza di risonanza rilevata sperimentalmente, la capacità del circuito $C = 330 \text{ nF}$, supponendo che l'errore sulla capacità sia 1 nF (dato che non è noto considero l'errore sull'ultima cifra del valore della capacità) e sapendo che l'errore commesso sulla frequenza è di 1 Hz , mediante il differenziale logaritmico della relazione precedente si può

trovare l'errore associato ad L:
$$\frac{\Delta L}{L} = 2 \frac{\Delta n_0}{n_0} + \frac{\Delta C}{C}$$
 sostituendo i valori noti si trova:

$$L = 2,77 \pm 0,01 \text{ mH}.$$

Nel parallelo LC si ha che la tensione è data da: $V = V_0 \cos \omega t$, mentre la corrente

complessiva è data da: $i = i_L + i_C$, dove $i_L = \frac{V_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ ed $i_C = \omega C V_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Quindi la corrente totale è data da: $i = i_0 \cos(\omega t + \phi)$ dove la corrente massima è data

dall'espressione $i_0 = V_0 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$, mentre lo sfasamento $\phi = -\frac{\pi}{2} \text{ se } \omega L > \frac{1}{\omega C}$ oppure

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ se } \omega L < \frac{1}{\omega C}.$$

In definitiva l'impedenza è data da
$$Z_0 = \frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} = \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}.$$

Il comportamento è diverso a seconda che sia $\omega < \omega_0$ oppure $\omega > \omega_0$ con $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$.

Per $\omega = \omega_0$, l'impedenza diventa infinita e la corrente si annulla, essendo $i_L = -i_C$, in questo caso l'impedenza ha un massimo e la corrente un minimo, si parla in questo caso di *antirisonanza*.

La corrente totale assorbita dal parallelo è sfasata rispetto alla tensione ai capi del parallelo, si usa scrivere la relazione tra il valore massimo della corrente e il valore massimo della d.d.p.

nella forma: $i_0 = Y_0 V_0$ definendo una nuova grandezza, l'ammittenza Y_0 ; dal confronto con la relazione di proporzionalità che lega il valore massimo della tensione V_0 alla corrente i_0 in un circuito RLC serie: $V_0 = Z_0 i_0$ dove Z_0 rappresenta l'impedenza, si evince che l'ammittenza è

$$\text{l'inverso dell'impedenza: } Y_0 = \frac{1}{Z_0}.$$

Solamente per curiosità avendo a disposizione il valore della resistenza R presente nel circuito ed avendo imposto io la d.d.p. (V_0) ho voluto calcolare il valore dell'ampiezza della

corrente I_0 in modo da poter ricavare la corrente I_1 dalla relazione ($I_1=I_0-I_2$) e graficare questa in funzione della frequenza (?).

➤ Conclusioni.

I valori rilevati mi hanno permesso di tracciare una curva di risonanza che rispecchia molto il comportamento del circuito, ovvero la sua selettività ad una determinata frequenza, ricordo che in realtà la curva dovrebbe essere ribaltata, al massimo valore corrisponde il punto di minimo, questo per i motivi citati nella parte riguardante la descrizione dell'esperienza. Per quanto riguarda il coefficiente di autoinduzione L , il valore ottenuto risulta essere compatibile con il valore noto di L entro i limiti degli errori sperimentali, poiché il valore da me trovato vale : $L_{EXP} = 2,77 \pm 0,01mH$ compatibile col valore noto $L_{THE} = 2,87 \pm 0,14mH$. Inoltre, ho anche tracciato la curva di antirisonanza, graficando la corrente I_1 in funzione della frequenza (?), e ho verificato realmente che al punto di massimo del grafico di I_2 in funzione di (?) corrisponde il punto minimo di I_1 in funzione della frequenza (?), di cui ho riportato il grafico.

➤ Grafici.

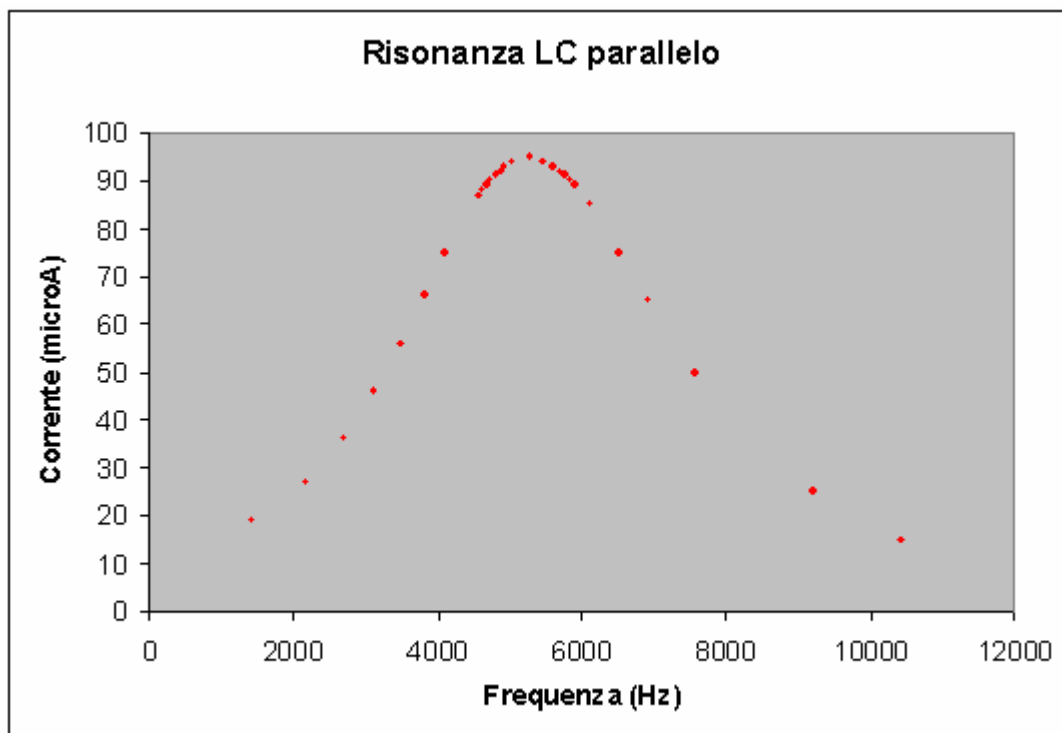


Grafico 1.

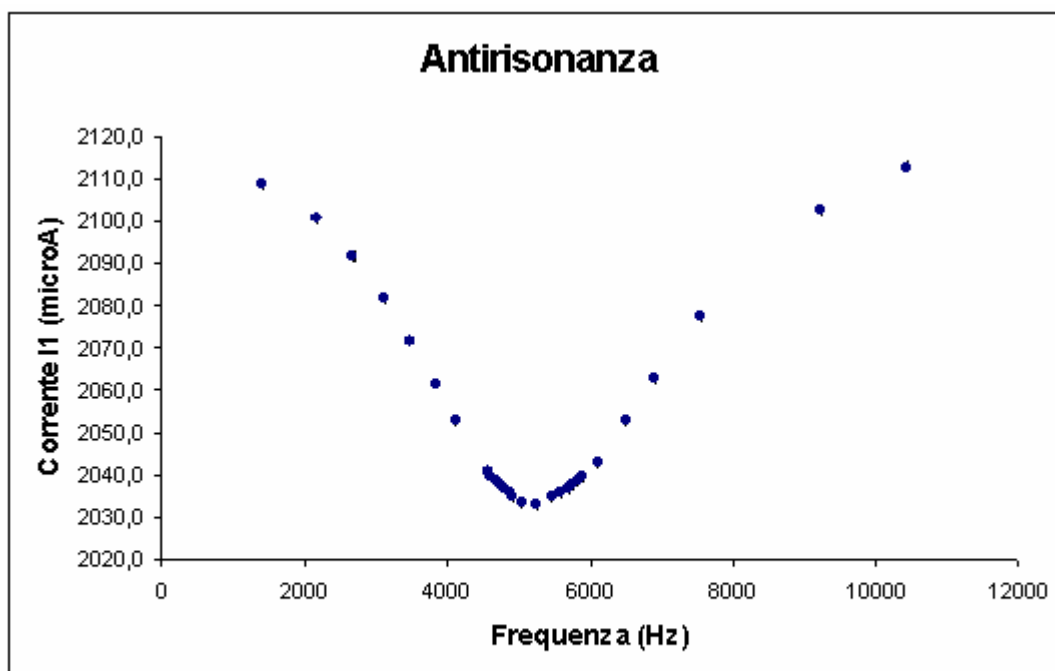


Grafico 2.

➤ Bibliografia.

A. Foti e C. Gianino "Elementi di Analisi dei dati sperimentali" Liguori, Napoli.

R. Ricamo "Guida alle sperimentazioni di Fisica" Ambrosiana, Milano.

J. R. Taylor "Introduzione all'analisi degli errori" Zanichelli, Bologna.

D. Halliday e R. Resnick "Fisica 2" Ambrosiana, Milano.

Mazzoldi-Nigro-Voci "Fisica vol. II" SES, Napoli.

Amaldi-Bizzarri-Pizzella "Fisica Generale" Zanichelli Bologna.

Prof. N.Arena Appunti delle lezioni anno accademico 2003-2004.

Prof. S. Costa Raccolta delle esperienze di Laboratorio di Fisica Generale II.