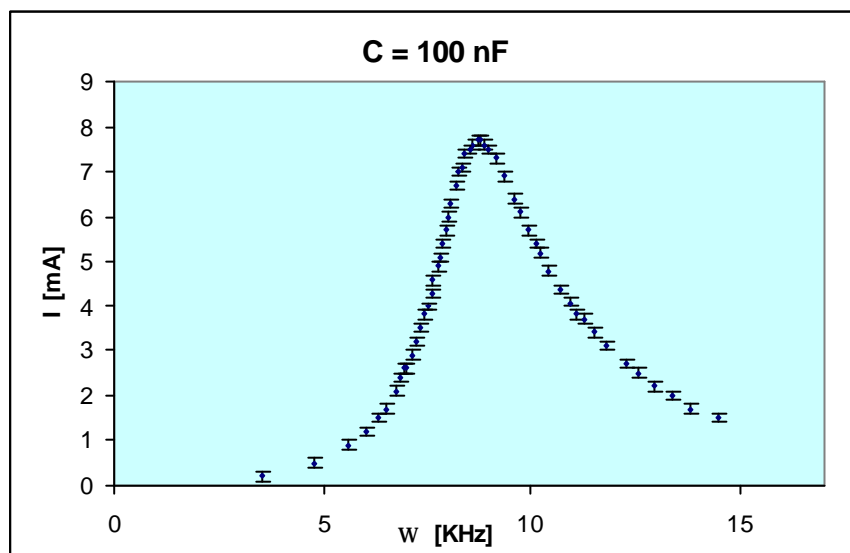


Curve di risonanza di un circuito



RLC - Serie

A.A.2003-2004

Indice

Introduzione	pag. 3
Presupposti Teorici	“ 5
Analisi dei dati	“ 15
1. Modo di operare	“ 15
2. Problema della resistenza presente nel circuito	“ 16
3. Misure del fattore di qualità	“ 23
4. Misure di induttanza	“ 31
Conclusioni	“ 33
Bibliografia	“ 34

Introduzione

L'esperienza eseguita in laboratorio consiste nel rilievo delle curve di risonanza di un circuito RLC serie.

Ovviamente parlare di risonanza significa parlare di circuiti percorsi da corrente alternata; nella esperienza verranno usate tensioni che hanno un andamento di tipo sinusoidale.

Nei circuiti percorsi da questo tipo di corrente entrano in gioco anche altre grandezze fisiche prima fra tutte il coefficiente di autoinduzione di una bobina, la quale è schematizzata nel nostro circuito con la lettera L; ovviamente si tratta di una schematizzazione, in quanto l'induttanza così come la resistenza è presente anche in un semplice filo, però nel corso dell'esperienza le considereremo "concentrate" l'una in una bobina, l'altra in un resistore trascurando il fatto che una resistenza presenta una induttanza e una bobina una resistenza.

Presentiamo di seguito una schematizzazione del circuito utilizzato

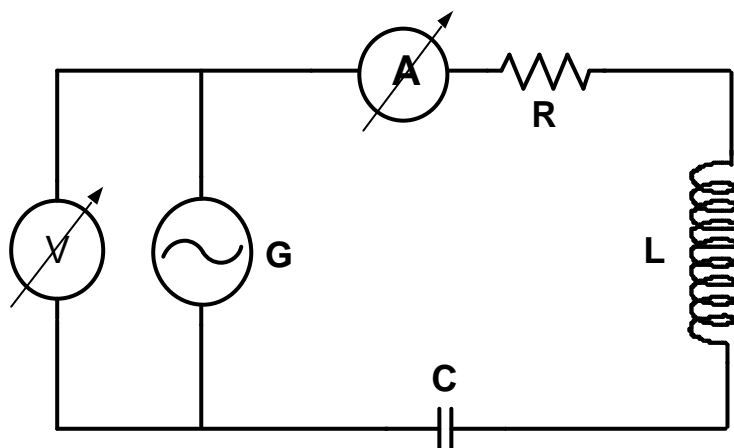


Fig.1 Schematizzazione del circuito RLC-Serie

Come detto sopra L indica l'induttanza, C un condensatore, R la resistenza dovuta all'amperometro (A) e all'induttanza, G indica un generatore di tensione alternata e V un voltmetro.

In parallelo al generatore era collegato un frequenzimetro, non schematizzato in figura, che permetteva di rilevare la frequenza delle oscillazioni.

Facciamo una considerazione: il voltmetro utilizzato durante l'esperienza è un voltmetro digitale perché l'utilizzo di un voltmetro meccanico ha alcune controindicazioni; se la risposta dello strumento fosse molto rapida l'ago oscillerebbe di continuo impedendone in ultima analisi la lettura, se invece i tempi di risposta fossero troppo lunghi il voltmetro segnerebbe la media, ed essendo i

segnali di tipo sinusoidale, e la risposta del voltmetro lineare, quest'ultimo misurerebbe proprio zero. Si usa perciò uno strumento con risposta quadratica.

Durante l'esperienza una volta rilevata la curva di risonanza si individuerà la frequenza di risonanza e il fattore di qualità del circuito.

Si esamineranno le curve di risonanza di tre circuiti i quali differiscono l'uno dall'altro solo nell'utilizzo di condensatori con capacità diverse.

* * *

Prima di analizzare i dati vediamo alcune considerazioni teoriche necessarie per il seguito della esperienza. Queste verranno trattate nel seguente paragrafo.

Presupposti teorici

Iniziamo questo paragrafo analizzando lo strumento che utilizzeremo per rilevare la tensione erogata dal generatore.

Il voltmetro utilizzato è elettrostatico, dunque la sua risposta non è lineare ma quadratica; esso restituirà allora il valore medio della tensione durante il tempo di risposta dello strumento, ma questa volta il valore non sarà zero perché la media viene fatta sul quadrato delle risposte.

Vediamo di trattare analiticamente quanto su detto: sia V_M l'ampiezza della tensione erogata dal generatore e sia $\sin(\omega t)$ la legge seguita. Allora detto \bar{V}^2 la risposta media dello strumento considerata sul proprio tempo di risposta si ha:

$$\bar{V}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_M^2 \sin^2(\omega t) dt \quad (1)$$

Risolvendo l'integrale (1) si ottiene la relazione

$$\bar{V}^2(t) = \frac{V_M^2}{2}$$

Dalla quale si ricava l'espressione del potenziale efficace

$$\bar{V}_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Vedremo come in modo del tutto analogo si definirà la corrente efficace che è quella misurata dall'ampmetro come

$$\bar{I} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Dove con I_M si è indicata l'ampiezza della corrente.

Prima di analizzare il circuito e dunque il comportamento degli elementi collegati in serie, analizziamo singolarmente i tre tipi di circuiti : resistivi, capacitativi e induttivi.

Nella trattazione ci rifaremo al metodo simbolico, cioè utilizzeremo, per indicare le correnti che circolano nel circuito, dei vettori, detti fasori, i quali ruotano in un piano coordinato; istante per istante la corrente che circola nel circuito sarà data dalla proiezione del rispettivo vettore sull'asse delle y, mentre il modulo del vettore fornisce la misura dell'ampiezza della corrente stessa.

Prima di proseguire facciamo un'ultima considerazione :

le leggi di Kirchoff sono valide istante per istante cioè dato un nodo vale

$$\sum_{k=1}^n I_k(t) = 0 \quad (4)$$

Avendo ovviamente I_k andamento sinusoidale, mentre nelle maglie vale

$$V(t) = \sum_{k=1}^n V_k(t) \quad (5)$$

Con $V(t)$ potenziale erogato dal generatore ad un ben determinato istante e V_k caduta di potenziale nelle singole maglie, osserviamo che sia $V(t)$ che $V_k(t)$ hanno andamento sinusoidale.

Ciò detto consideriamo un circuito resistivo realizzato collegando una resistenza con un generatore di f.e.m. alternata.

Sia

$$V(t) = V_M \sin(\omega t) \quad (6)$$

La legge con cui il generatore eroga la f.e.m. allora si avrà:

$$V_R = V_M \sin(\omega t) = I_R(t) \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad I_R(t) = \frac{V_M}{R} \sin(\omega t) = i_R \sin(\omega t) \quad (7)$$

Cioè la corrente è in fase con la tensione

Questa fatto può essere messo in rilievo servendosi del metodo simbolico; indichiamo con un vettore (nero) V_M l'ampiezza della tensione erogata dal generatore e con un altro vettore (rosso) i_R

quella della corrente che circola nel circuito, essendo infine proprio $\varphi = \theta$ l'angolo formato tra i due vettori e l'asse delle ascisse.

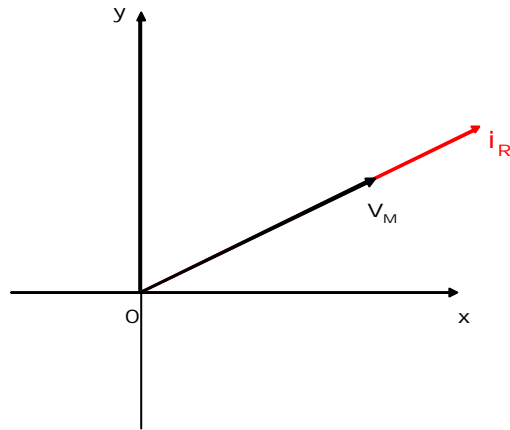


Fig.2 Rappresentazione simbolica circuito resistivo

Facciamo delle considerazioni analoghe per un circuito totalmente capacitivo sia sempre la (7) la legge con cui il generatore eroga la f.e.m. allora possiamo scrivere

$$V_M \sin(\omega t) - \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (8)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\omega \cdot V_M \cos(\omega t) - \frac{I_C}{C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_C = \omega \cdot V_M \cdot C \cos(\omega t) = i_C \cos(\omega t) \quad (9)$$

Essendo

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad I_C = i_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (10)$$

Dunque la corrente "anticipa" la tensione di $\frac{\pi}{2}$, questo risultato è rappresentato nella seguente figura.

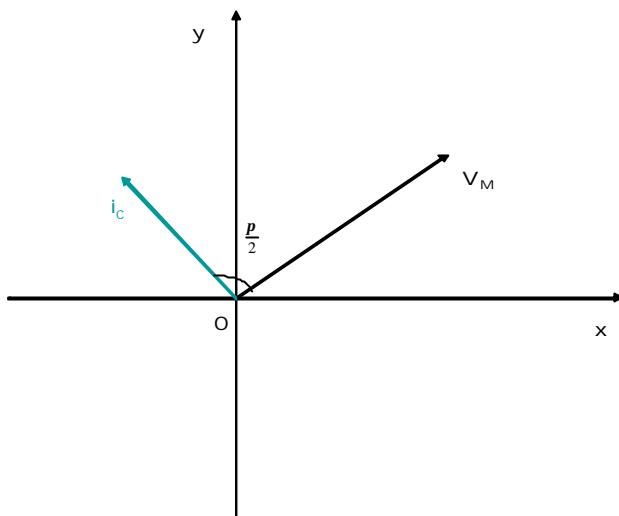


Fig.3 Rappresentazione simbolica circuito capacitativo

Infine, ferme restando le ipotesi di cui sopra, per un circuito esclusivamente induttivo si può scrivere:

$$V_M \sin(\omega t) - L \frac{dI_L(t)}{dt} = 0 \quad (11)$$

E integrando ambo i membri

$$I_L = -\frac{V_M}{L\omega} \cos(\omega t) = -i_L \cos(\omega t) \quad (12)$$

Ricordando che

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \Leftrightarrow I_L = i_L \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (13)$$

Cioè la corrente ritarda la tensione di $\frac{\pi}{2}$, la rappresentazione simbolica è rappresentata nella seguente figura.

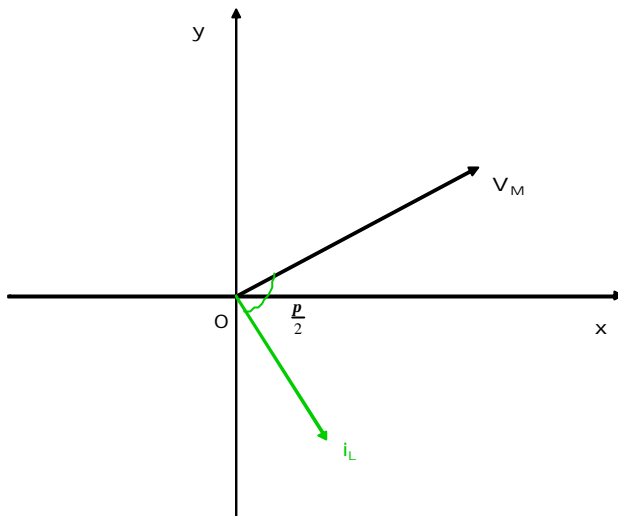


Fig.4 Rappresentazione simbolica circuito induttivo

Si avverte che i pedici, utilizzati per denotare le correnti nei tre tipi di circuiti, sono posti per indicare che si tratta di circuiti in cui sono presenti i singoli elementi e non per indicare un tipo particolare di corrente; inoltre con i_R , i_C , e i_L si è indicata l'ampiezza della corrente nei vari

circuiti.

Nella tabella sottostante riportiamo le relazioni trovate tra le ampiezze delle correnti e quelle del potenziale

$$\begin{cases} i_R = \frac{V_M}{R} \\ i_C = V_M \cdot \omega \cdot C \\ i_L = \frac{V_M}{\omega \cdot L} \end{cases} \quad (14)$$

Dove si definiscono

$\frac{1}{\omega \cdot C}$ reattanza capacitativa del circuito

$\omega \cdot L$ reattanza induttiva del circuito

Osserviamo che sia la i_C che la i_L dipendono da ω mentre la i_R non vi dipende.

Ciò detto vediamo di analizzare teoricamente le relazioni tra correnti e tensioni in un circuito RLC serie .

Supponiamo che la f.e.m. erogata segua la legge

$$V = V_M \sin(\omega t) \quad (15)$$

Allora la corrente che circola nel circuito è data da una legge del tipo

$$I = i_M \sin(\omega t - \mathbf{j}) \quad (16)$$

Con $-\frac{\mathbf{p}}{2} \leq \mathbf{j} \leq \frac{\mathbf{p}}{2}$ e ovviamente essa è la stessa per tutti gli elementi del circuito.

Per la validità delle leggi di Kirchoff, possiamo scrivere

$$V_M \sin(\omega t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t) \quad (17)$$

Ricordando che la corrente che attraversa la resistenza è in fase con la f.e.m. per la (16) e grazie alle (14) possiamo allora scrivere:

$$V_R(t) = i_M \cdot R \cdot \sin(\omega t - \mathbf{j}) = v_R \sin(\omega t - \mathbf{j}) \quad (18)$$

Dovendo invece la corrente che attraversa l' induttanza essere in ritardo di $\frac{\mathbf{p}}{2}$ rispetto alla f.e.m. e sempre per la (16) si ha

$$V_L(t) = i_M \cdot \omega \cdot L \cdot \sin(\omega t - \mathbf{j} + \frac{\mathbf{p}}{2}) = v_L \sin(\omega t - \mathbf{j} + \frac{\mathbf{p}}{2}) \quad (19)$$

Infine con considerazioni analoghe si ricava

$$V_C(t) = i_M \cdot \frac{1}{\omega L} \sin(\omega t - \mathbf{j} - \frac{\mathbf{p}}{2}) = v_C \sin(\omega t - \mathbf{j} - \frac{\mathbf{p}}{2}) \quad (20)$$

Sostituendo le tre relazioni nella (17) si ricava

$$V_M \sin(\omega t) = v_R \sin(\omega t - \mathbf{j}) + v_C \sin(\omega t - \mathbf{j} - \frac{\mathbf{p}}{2}) + v_L \sin(\omega t - \mathbf{j} + \frac{\mathbf{p}}{2}) \quad (21)$$

Dove con v_R, v_C, v_L si è indicata l'ampiezza della caduta di potenziale ai capi dei rispettivi elementi.

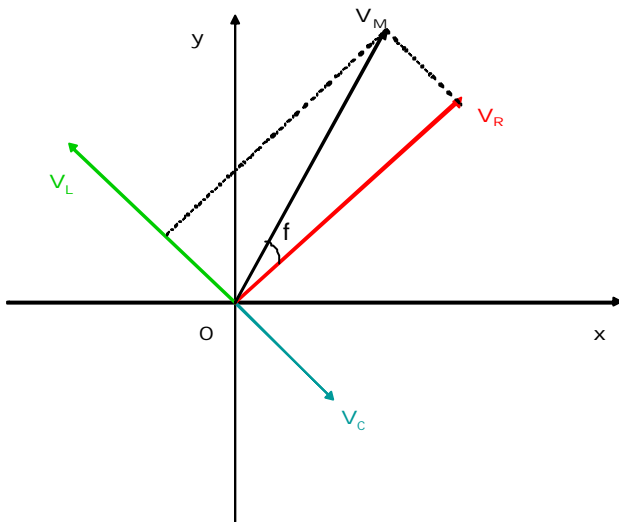


Fig.5 Rappresentazione simbolica potenziali di RLC_serie

La (21) può essere risolta analiticamente oppure servendoci del metodo grafico precedentemente usato negli altri circuiti.

Seguiremo questo secondo metodo; riportiamo dunque la figura qui di fianco a cui fanno riferimento i successivi calcoli.

Con considerazioni di carattere geometrico e tenendo conto delle (14) segue :

$$V_M = \sqrt{v_R^2 + (v_L - v_C)^2} = \sqrt{i_M^2 \cdot R^2 + (i_M \cdot \omega L - i_M \frac{1}{\omega C})^2} = i_M \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (22)$$

Posto

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (23)$$

Si ottiene

$$V_M = i_M \cdot Z \quad (24)$$

La quale è formalmente uguale alla prima legge di Ohm, dove la Z assolve il ruolo della resistenza in un circuito percorso da corrente continua.

La grandezza Z è detta induttanza reale per distinguerla da quella complessa che entra in gioco quando si ricava la (22) non con metodo grafico ma servendosi della rappresentazione dei con i numeri complessi .

Riguardando alla fig. 5 si ricava la seguente relazione

$$\operatorname{tag} \mathbf{j} = \frac{V_L - V_C}{V_C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} = \operatorname{arctag} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (25)$$

Servendoci delle (25) possiamo allora riscrivere l'impedenza come

$$Z = \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 \mathbf{j}} \cdot R = \frac{R}{|\cos \mathbf{j}|} \quad (26)$$

La quale rende più esplicito quanto su detto.

Diremo pulsazione di risonanza di un circuito che indicheremo con ω_0 la pulsazione per cui l'impedenza assume il minimo valore ovvero $Z \equiv R$ il che significa $\cos \mathbf{j} = 1$ e dunque $\mathbf{j} = 0$, che per le (25) si traduce in

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (27)$$

Da cui risolvendo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (28)$$

E in condizioni di risonanza per la (24) si ha

$$V_M = i_M \cdot R \quad \Leftrightarrow \quad i_M = \frac{V_M}{R} \quad (29)$$

Valori teorici che confronteremo durante l'elaborazione dei dati con i risultati ricavati sperimentalmente, discutendone congruenze e discordanze.

L'ultimo passo da fare, prima di procedere con l'analisi dei dati, è quello di introdurre il fattore di qualità; per fare ciò è necessario definire la potenza

$$W = I_{eff}^2 \cdot R \quad (30)$$

Noi riporteremo in un grafico W in funzione di ω e ci soffermeremo sul massimo valore assunto da W che si ottiene, per le (24) e le (29), in corrispondenza della frequenza di risonanza ω_0 , potendo dunque ricavare quest'ultima direttamente dalla curva di risonanza; e sulla larghezza di mezza altezza $\Delta\omega = \omega_D - \omega_A$ della curva di risonanza (con ω_D, ω_A pulsazioni una nella parte ascendente e l'altra in quella discendente della curva di risonanza corrispondenti a $W_{\frac{1}{2}}$), la quale si ottiene in corrispondenza del valore

$$W_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} W_{max} \quad (31)$$

Infatti si ha

$$W = i_{eff}^2 \cdot R = V_{eff}^2 \cdot \frac{R}{Z^2} = \frac{V_{eff}^2}{R} \cdot \cos^2 \mathbf{j} \quad (32)$$

In condizioni di risonanza $f=0$ e dunque

$$W_{max} = \frac{V_{eff}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \overline{W} = \frac{1}{2} \frac{V_{eff}^2}{R} \quad (33)$$

Allora ciò detto definiamo il fattore di qualità

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (34)$$

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (34')$$

Durante l'esperienza tratteremo le curve di risonanza corrispondenti ai tre differenti condensatori, calcoleremo l'induttanza servendoci della (28), confronteremo il valore i_0 ricavato sperimentalmente con quello atteso teoricamente ed infine ricaveremo a mezzo della (34) il fattore di qualità confrontandolo con quello dato dalla (34').

Analisi dei dati

1. Modo di operare

In laboratorio è stato realizzato il circuito di fig. 1 .

Si è usato un generatore di f.e.m. alternata che seguisse un andamento di tipo sinusoidale ; mentre l'amperometro utilizzato era uno strumento meccanico, per misurare l'ampiezza della tensione è stato usato un voltmetro elettrostatico.

Fissata l'ampiezza della tensione è stata fatta variare la frequenza, misurata di volta in volta con un frequenzimetro con sensibilità dell'Hertz, e in corrispondenza si è letto il valore della corrente che attraversava il circuito; di volta in volta, prima di ogni lettura, è stata regolata l'ampiezza della tensione al valore prescelto. Infatti al variare della frequenza varia anche l'impedenza del circuito e dunque l'ampiezza della corrente che lo attraversa e di conseguenza la caduta di potenziale ai capi della resistenza interna del generatore; allora la tensione erogata risulta essere funzione della frequenza. Nel prossimo paragrafo vedremo come sia di grande rilievo per la bontà delle nostre misure il valore di questa resistenza.

Sono stati eseguiti tre set di misure nei quali i circuiti differiscono tra loro solo per i condensatori usati. Le capacità dei condensatori sono fornite dal costruttore con un errore del 5%, e valgono $C_1=100\text{nF}$ $C_2=220\text{nF}$ $C_3=470\text{nF}$.

L'amperometro utilizzato aveva la sensibilità di 0,1 mA e il suo fondo scala è stato tarato a 10 mA; queste impostazioni non sono state variate al variare del circuito.

Come errore sulla corrente si userà $e = \sqrt{e_p^2 + e_s^2}$ (con e_p errore di precisione, ottenuto dalla seguente relazione $e_p = \frac{c.p. \cdot f.s.}{100}$ con c.p. classe di precisione dello strumento e f.s. suo fondo scala, e e_s errore di sensibilità dello strumento). La resistenza del circuito è $R = 76,7 \pm 0,1 \text{ O}$ dovuta alla resistenza interna dell'amperometro e a quella della bobina; per misurarla si è adoperato un tester collegando in serie l'amperometro e la bobina, misurando così la resistenza risultante. Osserviamo sin d'ora che in questa fase non si è tenuto conto della resistenza interna del generatore che si mostrerà invece rilevante nelle nostre misure.

2. Problema della resistenza presente nel circuito

Cominciamo l'analisi dei dati analizzando e confrontando la relazione teorica (29) con il valore ricavato sperimentalmente discutendo il motivo del rilevante discordo tra valore sperimentale e valore atteso.

A tal proposito riportiamo di seguito i valori delle correnti e delle pulsazioni nei relativi circuiti.

Tabella 1 Misure di corrente e pulsazione per il circuito con $C=100\text{ nF}$

i [mA]	? [Rad/sec]	i [mA]	? [Rad/sec]
0,2	3519	7,1	8294
0,5	4775	7,6	8608
0,9	5592	7,5	8482
1,2	6032	7,7	8734
1,5	6283	7,7	8796
1,7	6472	7,5	8985
2,1	6723	7,3	9173
2,4	6849	6,9	9362
2,6	6912	6,4	9613
2,6	6974	6,1	9739
2,9	7100	5,4	10116
3,2	7226	5,7	9927
3,5	7288	5,2	10242
3,8	7414	4,8	10430
4,0	7477	4,4	10681
4,3	7603	4,1	10933
4,6	7603	3,7	11247
4,9	7728	3,8	11058
5,1	7791	3,4	11498
5,4	7854	3,1	11812
5,7	7917	2,7	12252
6,0	7980	2,5	12566
6,3	8042	2,2	12943
6,7	8168	2,0	13383
7,0	8231	1,7	13823
7,4	8357	1,5	14451
7,6	8859		

Riportiamo di seguito i valori disposti in un grafico

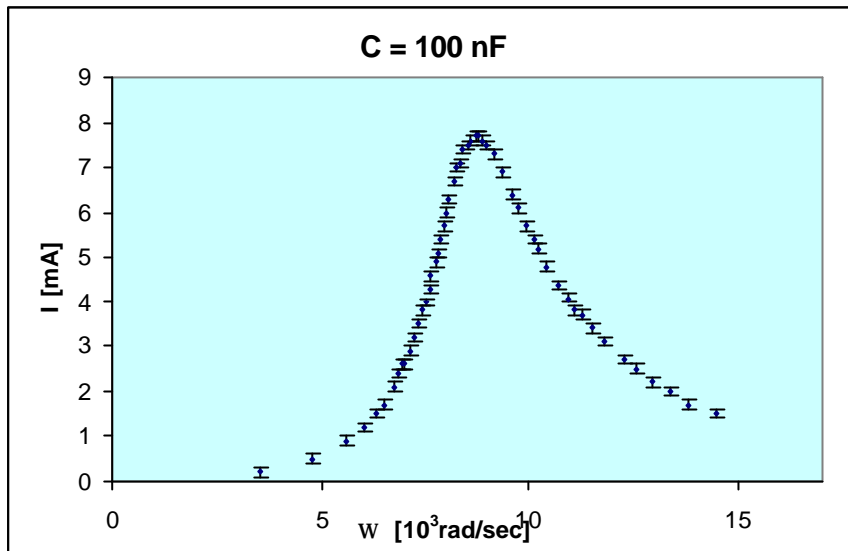


Fig. 5 Curva di risonanza i in funzione di ω

Servendosi del valore della resistenza misurato e del valore noto dell'ampiezza della f.e.m. ($V = 3,0 \pm 0,1$ V) tramite la (35) si ricava il valore teorico della corrente di risonanza che per questo circuito vale $i_M = 39,1 \pm 1,3$ mA mentre il risultato misurato in laboratorio è $i = 7,7 \pm 0,1$ mA: la differenza è rilevante. Prendendo per buono il valore della corrente di risonanza da noi misurato e nota l'ampiezza della f.e.m. erogata dal generatore, ricaviamo, servendoci sempre della (35), il valore della resistenza complessiva del circuito in condizioni di risonanza.

Dalla (35) si ricava

$$R = \frac{V_M}{i_M} \quad (35')$$

E dunque il valore della resistenza è $R = 390 \pm 18$ Ω .

Dove l'errore sulla misura lo si ottenuto dalla seguente espressione

$$\Delta R = R \cdot \left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta i}{i} \right) \quad (36)$$

Si vede come il valore differisce notevolmente da quello misurato con il tester; discuteremo di seguito questa discordanza.

Vediamo cosa succede per i due successivi circuiti.

Riportiamo in tabella i dati afferenti al secondo circuito in cui è stato usato un condensatore di capacità $C_2 = 220$ nF.

Tabella 2 Misure di corrente e pulsazione per il circuito $C = 220 \text{ nF}$

i [mA]	ω [Rad/sec]	i [mA]	ω [Rad/sec]
1,2	3519	5,2	7226
1,5	3770	4,7	7477
1,8	3958	4,1	7728
2,4	4147	3,4	8168
3,3	4461	3,0	8545
5,0	4838	2,6	8985
3,7	4587	2,3	9299
5,3	4901	2,0	9739
7,7	5215	1,7	10304
9,2	5404	1,4	10996
9,6	5529	1,1	12127
9,8	5718	1,0	12692
9,4	5906	8,5	5278
8,4	6220	8,8	5341
9,2	6032	7,4	5152
8,0	6346	6,4	5027
6,2	6849	7,1	5089
7,0	6660	5,8	4964
5,8	7037	4,6	4775
		4,0	4650

Riportiamo il seguente grafico

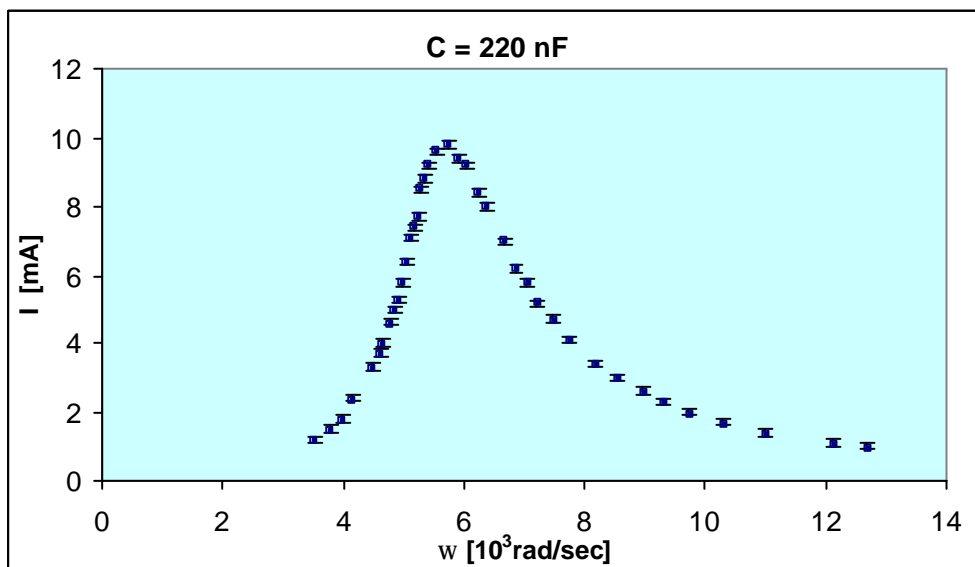


Fig. 6 Curva di risonanza i in funzione di ω

In queste misure l'ampiezza della f.e.m. è stata fissata al valore di $V = 2,5 \pm 0,1$ V dunque per la (35) il valore teorico dell'ampiezza della corrente della curva di risonanza è $i_M = 32,6 \pm 1,3$ mA, mentre quello ricavato sperimentalmente è $i = 9,8 \pm 0,1$ mA. Seguendo quando fatto precedentemente ricaviamo a mezzo della (35') la resistenza del circuito R con il suo errore dato ancora una volta dalla (36)

$$R = 255 \pm 10 \text{ O.}$$

Riportiamo, infine, le misure e la corrispondente curva di risonanza del terzo circuito in cui si è usato un condensatore con capacità $C_3 = 470$ nF.

Tabella 3 Misure di corrente e pulsazione per il circuito $C=470$ nF

i [mA]	? [Rad/sec]	i [mA]	? [Rad/sec]
2,8	3135	6,3	4543
3,1	3186	5,8	4662
3,2	3236	4,7	4989
3,4	3248	5,4	4788
3,6	3292	4,5	5089
3,8	3318	4,2	5184
4,0	3355	4,0	5259
4,2	3380	3,8	5328
4,4	3405	4,1	5215
4,6	3443	3,9	5278
4,8	3475	3,7	5378
5,2	3506	3,6	5435
5,0	3500	3,5	5485
5,6	3569	3,4	5523
5,8	3588	3,2	5636
6,6	3701	3,1	5686
6,2	3713	3,0	5755
7,5	3858	2,8	5868
6,9	3738	2,7	5931
7,6	4166	2,5	6114
7,8	4046	2,4	6139
7,7	4147	2,2	6321
7,6	4191	2,0	6528
7,7	3952	1,8	6754
7,7	3933	1,5	7144
7,6	3870	1,2	7703
7,3	4291	1,0	8168
7,1	4361	0,7	9249
6,6	4474	0,4	11278
		0,1	12504

La corrispondente curva di risonanza è

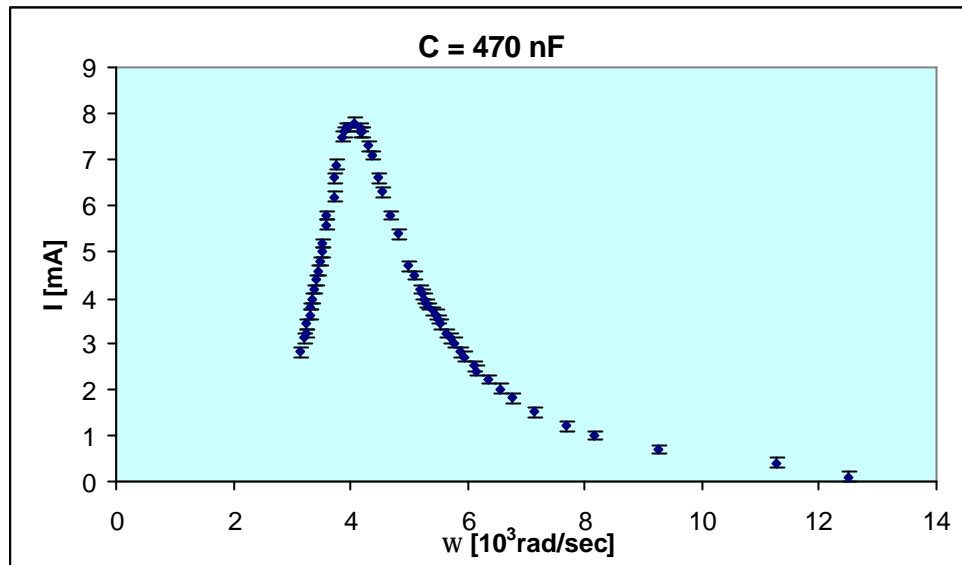


Fig. 7 Curva di risonanza i in funzione di ω

Il valore teorico della corrente di risonanza è $i_M = 19,5 \pm 1,3$ mA (si è usata una ampiezza di f.e.m. $V = 1,5 \pm 0,1$ V) mentre quello sperimentale è $i = 7,8 \pm 0,1$ mA.

Il valore della resistenza del circuito ricavato sperimentalmente è $R = 192 \pm 13$ O.

Vediamo come in tutti i circuiti i valori delle resistenze misurate in condizioni di risonanza discostano notevolmente dal valore rilevato a mezzo del tester.

Osserviamo inoltre che questi valori in linea di principio dipendono sia dalla frequenza di risonanza che dal condensatore. Riportiamo nel seguente grafico i valori della resistenze per i tre circuiti in funzione della frequenza. Per fare ciò dalla relazione (23) ricaviamo l'espressione desiderata.

$$R = \sqrt{\frac{V^2}{i^2} - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (37)$$

Dove si è fatto uso della seguente relazione $Z^2 = \frac{V^2}{i^2}$.

Riportiamo in un grafico la relazione (37) servendoci dei dati sperimentali da noi ricavati in laboratorio infatti per ogni misura si ha un valore di ω , uno di i e uno di V .

Nel seguente grafico riportiamo queste relazione per tutti e tre i circuiti.

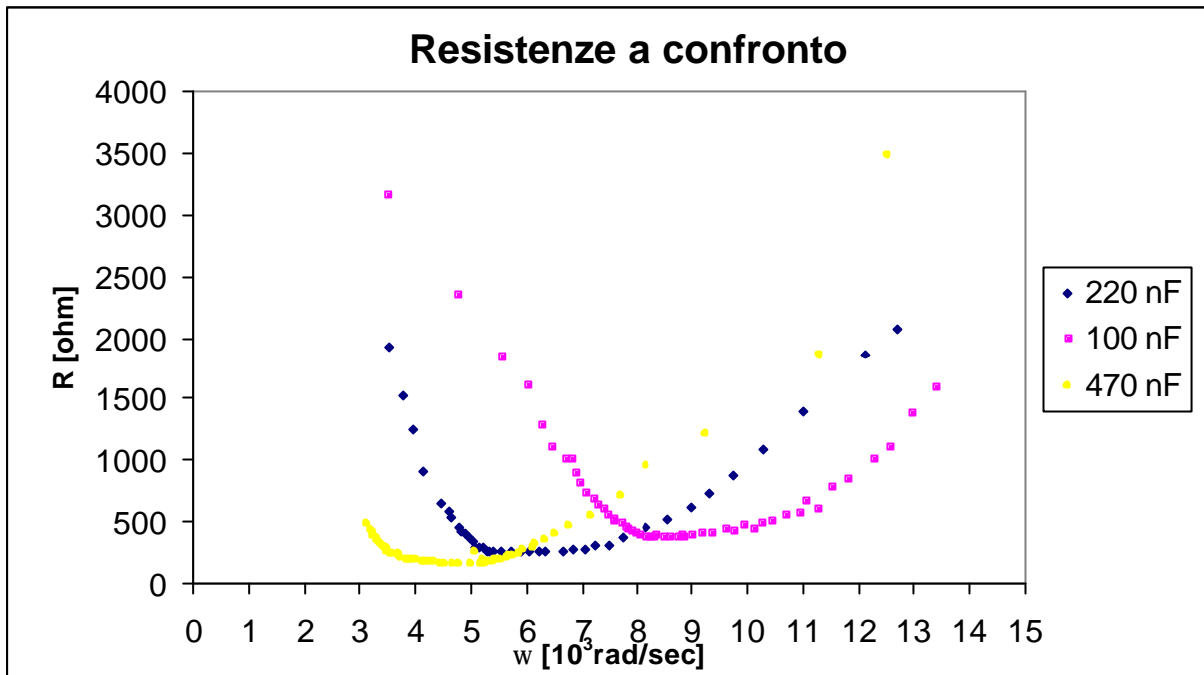


Fig. 8 Resistenze in funzione della frequenza

Vediamo come l'andamento delle curve è praticamente identico: le curve sembrano essere solo traslate nel piano una rispetto all'altra; ogni curva presenta una zona in cui la resistenza, per cospicue variazioni di pulsazioni, non subisce brusche variazioni mentre al di fuori di questo range a piccole variazioni di frequenze corrispondono grosse variazioni di resistenze.

La cosa interessante è che i valori delle frequenze di mezza altezza delle curve di potenza, come vedremo nel paragrafo successivo, sono contenute in questo range di regolarità. Allora si potrebbe stimare come valore della resistenza dei rispettivi circuiti, che servirà di seguito per calcolare il fattore di qualità mediante la (34'), il valore centrale del range di variazione delle resistenze al variare delle pulsazioni all'interno dell'intervallo d individuato dalle rispettive pulsazioni di mezz'altezza e come errore la semi ampiezza di tale range .

A tal proposito ingrandiamo il grafico precedente in corrispondenza della zona di costanza della resistenza.

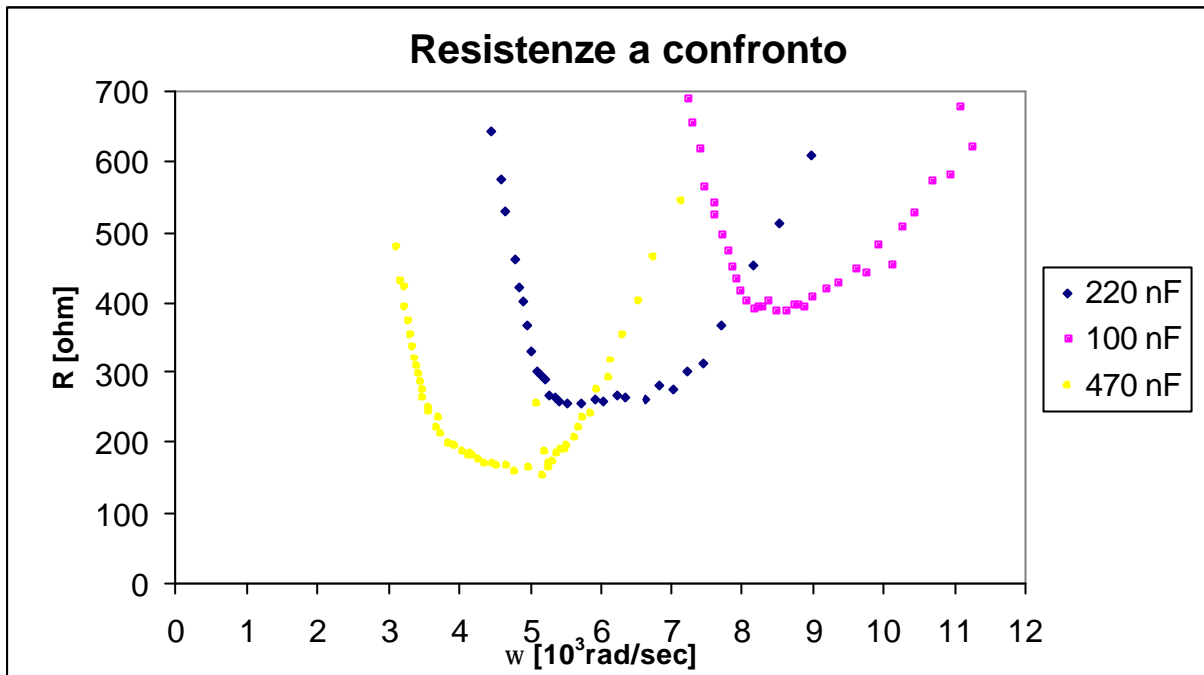


Fig. 9 Range di stabilità delle curve di resistenza

Riportiamo di seguito i valori delle resistenze per i tre differenti circuiti ricavati con il metodo su specificato e con il loro rispettivo errore e li confronteremo con i valori stimati in condizioni di risonanza.

Valori ricavati dalle curve di resistenza in funzione della frequenza

$$\begin{cases} R_{100nF} = 420 \pm 30\Omega \\ R_{220nF} = 277 \pm 22\Omega \\ R_{470nF} = 214 \pm 61\Omega \end{cases} \quad (38)$$

Riportiamo di seguito i valori calcolati in condizioni di risonanza

$$\begin{cases} R_{100nF} = 389 \pm 18\Omega \\ R_{220nF} = 255 \pm 10\Omega \\ R_{470nF} = 192 \pm 13\Omega \end{cases} \quad (38')$$

I valori ricavati, con gli errori, sono tra loro confrontabili e i range di errore delle misure si intrecciano tra loro; dunque c'è una buona concordanza tra i due metodi ; noi comunque seguiremo quest'ultimo perché nel fattore di qualità dato dalla (34) entra comunque in gioco un $d?$ e per queste misure il valore della resistenza non è quello stimato in condizioni di risonanza.

3. Misure del fattore di qualità Q

Un altro passo dell'esperienza consiste nel calcolare il fattore di qualità del circuito e confrontarlo con quello teorico; come già ricordato per questo tipo di calcolo si preferisce riportare la curva di risonanza, considerando, non l'intensità di corrente ma la potenza in funzione della pulsazione.

Per calcolare il fattore di qualità servendosi della (34) è necessario conoscere la frequenza di risonanza e la larghezza della curva a mezza altezza.

Il primo passo è dunque calcolare la pulsazione di risonanza; per fare ciò nel caso del circuito con condensatore di capacità $C_1 = 100 \text{ nF}$ sono state rilevate due frequenze alle quali corrisponde la stessa corrente, ovvero la stessa potenza; allora, considereremo come pulsazione di risonanza il valore medio delle due suddette pulsazioni e considereremo come errore l'ampiezza del semi intervallo delle pulsazioni per il quale si determina la stessa potenza.

Per gli altri circuiti si effettuerà una interpolazione parabolica tra i tre punti per i quali si ha il massimo valore della potenza; allora come pulsazione di risonanza riveleremo l'ascissa del vertice della parabola così determinata.

Per rilevare l'errore su tale pulsazione, partendo dall'ordinata del vertice, sottraiamo $0,1 \text{ mA}$ e consideriamo i valori delle pulsazioni corrispondenti a questo valore; allora l'errore sarà dato dalla semiampiezza di tale intervallo.

Si pone ora il problema di determinare la pulsazione di mezza altezza; per fare ciò dal vertice delle parabole prima citate si ricava la potenza massima (ordinata del vertice), si determinano i quattro punti, due nella parte ascendente della curva di risonanza e due in quella discendente, tali che il valore della potenza massima diviso due

$(\frac{1}{2} w_{\max})$ sia contenuto tra i valori delle loro ordinate.

Fatto ciò si eseguirà una interpolazione lineare tra i due punti della parte ascendente della curva e tra quelli della parte discendente della curva. Allora la relazione che ci permette di determinare la pulsazione di mezza altezza è data da

$$w = w_1 + \frac{W_1 - W_1}{W_2 - W_1} \cdot (w_2 - w_1) \quad (39)$$

Dove $\frac{W_1}{2}$ è il valore della potenza massima diviso due, W_1 e W_2 sono le potenze dei due punti che contengono il valore $\frac{W_1}{2}$, una volta appartenenti alla parte ascendente e un'altra volta a quella discendente della curva di risonanza, e ω_1 e ω_2 le rispettive pulsazioni, mentre ω è la pulsazione corrispondente al valore $\frac{W_1}{2}$.

Bisogna ora ricavare l'errore sulla ampiezza della curva a mezza altezza $d\omega = \omega_D - \omega_A$ dove indichiamo con ω_A la pulsazione corrispondente a $\frac{W_1}{2}$ nella parte ascendente della curva e con ω_D quella nella parte discendente della curva.

Ciò detto per ottenere l'errore $d\omega$ sull'ampiezza della curva a mezza altezza è necessario conoscere quello sulla ω_A e sulla ω_D .

Per fare ciò consideriamo sempre la (39) e calcoliamo il valore di ω sostituendo a $\frac{W_1}{2}$ una volta il valore della potenza massima più il suo errore tutto diviso due, e un'altra volta, il valore della potenza massima meno il suo errore tutto diviso due; si otterranno così due nuovi valori della pulsazione di mezza altezza, allora si prenderà come errore sulla pulsazione di mezza altezza la differenza, in valore assoluto, fra la pulsazione corrispondente a $\frac{W_1}{2}$ e le altre due pulsazioni calcolate nel modo su descritto.

Questo ragionamento ripetuto per determinare l'errore sia su ω_A che su ω_D ; ciò fatto è determinato l'errore su $d\omega$.

Sarà così possibile determinare il fattore di qualità tramite la (34) e il suo rispettivo errore dato dalla

$$\Delta Q = Q \cdot \left(\frac{\Delta w_0}{w_0} + \frac{\Delta dw}{dw} \right) \quad (40)$$

Un'ultima considerazione l'errore sulla potenza è dato dalla seguente formula che riportiamo di seguito per completezza di analisi

$$\Delta W = W \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} + 2 \frac{\Delta I_{eff}}{I_{eff}} \right) \quad (41)$$

Ciò detto riportiamo in tabella le misure delle pulsazioni e delle rispettive potenze afferenti al primo dei tre circuiti, quello realizzato con il condensatore di capacità $C_1 = 100 \text{ nF}$.

Tabella 4 Dati di potenza e pulsazione per il circuito $C = 100 \text{ nF}$

ω [Rad/sec]	W [mW]	ω [Rad/sec]	W [mW]
4775	0,1	8294	19,6
5592	0,3	8608	22,5
6032	0,5	8482	21,9
6283	0,8	8734	23,1
6472	1,1	8796	23,1
6723	1,7	8985	21,2
6849	2,2	9173	20,7
6912	2,6	9362	18,5
6974	2,6	9613	15,9
7100	3,2	9739	14,5
7226	3,9	10116	11,3
7288	4,7	9927	12,6
7414	5,6	10242	10,5
7477	6,2	10430	8,9
7603	7,2	10681	7,5
7603	8,4	10933	6,5
7728	9,3	11247	5,3
7791	10,1	11058	5,6
7854	11,3	11498	4,5
7917	12,6	11812	3,7
7980	14,0	12252	2,8
8042	15,6	12566	2,4
8168	17,4	12943	1,8
8231	19,0	13383	1,5
8357	21,3	13823	1,1
8859	22,5	14451	0,8

L'errore sulla misura delle potenze è $\Delta W = 1,6 \text{ mW}$.

Riportiamo in grafico la curva di risonanza relativa al circuito in studio.

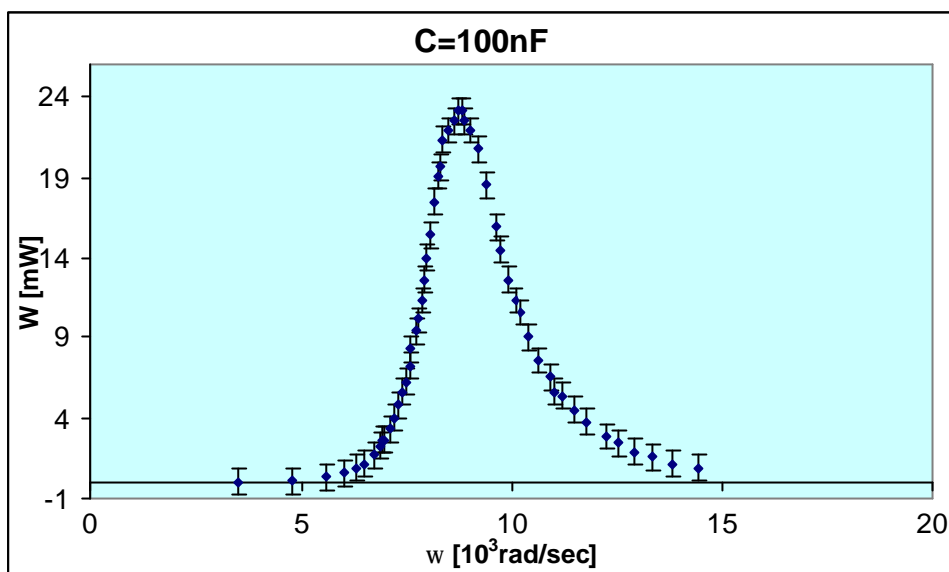


Fig. 10 Curva di risonanza W in funzione di ω

La pulsazione di risonanza calcolata è $\omega_0 = 8765 \pm 31$ Rad/sec i valori di quelle a mezza altezza calcolate servendosi della (9) sono, proseguendo con la notazione adottata all'inizio di questo paragrafo, $\omega_A = 7863 \pm 10$ Rad/sec , $\omega_D = 9954 \pm 30$ Rad/sec da cui si ricava il valore $d = 2091 \pm 40$ Rad/sec.

Allora il fattore di qualità di questo circuito ricavato sperimentalmente è $Q = 4,19 \pm 0,09$

Ripetiamo le medesime considerazioni per il secondo circuito riportando in tabella le potenze e le pulsazioni relative al secondo circuito.

Tabella 5 Dati di potenza e pulsazione per il circuito $C = 220$ nF

ω [Rad/sec]	W [mW]	ω [Rad/sec]	W [mW]
3519	0,3	7477	5,6
3770	0,5	7728	4,2
3958	0,8	8168	2,9
4147	1,4	8545	2,3
4461	2,7	8985	1,7
4838	6,3	9299	1,3
4587	3,4	9739	1,0
4901	7,1	10304	0,7
5215	15,1	10996	0,5
5404	21,5	12127	0,3
5529	23,5	12692	0,2
5718	24,5	5278	18,4
5906	22,5	5341	19,7
6220	18,0	5152	13,9
6032	21,5	5027	10,4
6346	16,3	5089	12,8
6849	9,8	4964	8,5
6660	12,5	4775	5,4
7037	8,5	4650	4,0
7,226	6,9		

In questo caso l'errore sulle misure delle potenze vale $\Delta W = 1,5 \text{ mW}$.

Riportiamo la curva di risonanza di su detto circuito

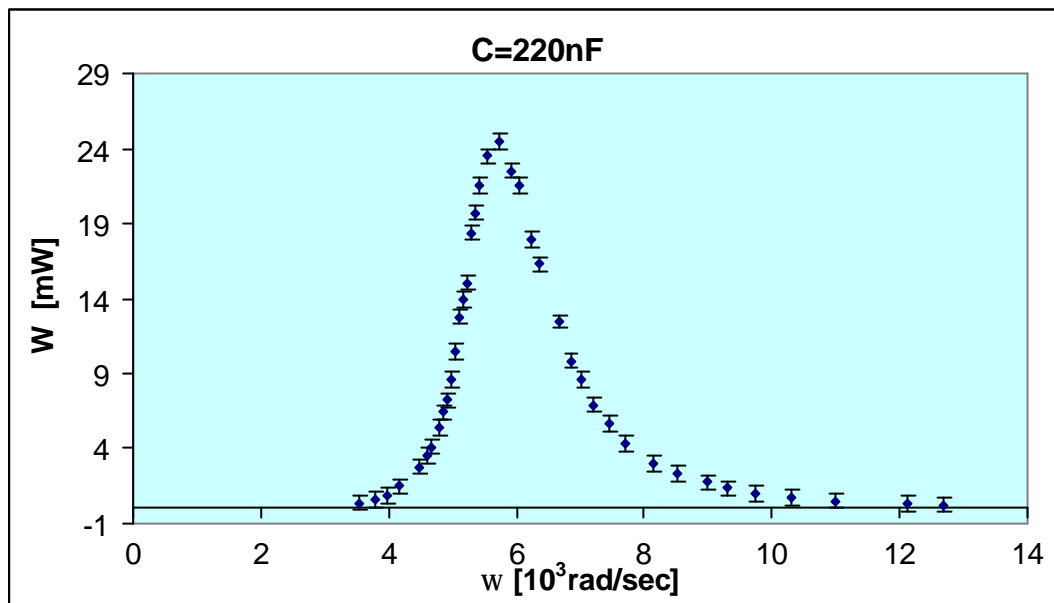


Fig 11 Curva di risonanza W in funzione di w

La pulsazione di risonanza calcolata è $\omega_0 = 5686 \pm 109 \text{ Rad/sec}$ i valori delle pulsazioni di mezza altezza sono $\omega_A = 5101 \pm 10 \text{ Rad/sec}$, $\omega_D = 6831 \pm 20 \text{ Rad/sec}$ da cui si ricava il valore $d\omega = 1730 \pm 30 \text{ Rad/sec}$.

Allora il fattore di qualità di questo circuito ricavato sperimentalmente è

$$Q = 3,30 \pm 0,12$$

Infine per il terzo circuito si ha

Tabella 6 Dati di potenza e pulsazione per il circuito $C = 470 \text{ nF}$

ω [Rad/sec]	W [mW]	ω [Rad/sec]	W [mW]
3135	1,5	4474	8,3
3186	1,8	4543	7,6
3236	1,9	4662	6,4
3248	2,2	4989	4,2
3292	2,4	4788	5,6
3318	2,7	5089	3,8
3355	3,0	5184	3,3
3380	3,3	5259	3,0
3405	3,7	5328	2,7
3443	4,0	5215	3,2
3475	4,4	5278	2,9
3506	5,2	5378	2,6
3500	4,8	5435	2,4
3569	6,0	5485	2,3
3588	6,4	5523	2,2
3701	8,3	5636	1,9
3713	7,3	5686	1,8
3858	10,8	5755	1,7
3738	9,1	5868	1,5
4166	11,1	5931	1,4
4046	11,7	6114	1,2
4147	11,4	6139	1,1
4191	11,1	6321	0,9
3952	11,4	6528	0,7
3933	11,4	6754	0,6
3870	11,1	7144	0,4
4291	10,2	7703	0,2
4361	9,6	8168	0,1

L'errore sulle misure di potenza vale $\Delta W = 1,0 \text{ mW}$.

Vogliamo osservare esplicitamente che nonostante l'incertezza sulla misura della corrente sia sempre la stessa l'incertezza sulla potenza varia da circuito a circuito, perché da circuito a circuito varia la resistenza effettiva presente nel circuito stesso.

Riportiamo di seguito la curva di risonanza del circuito.

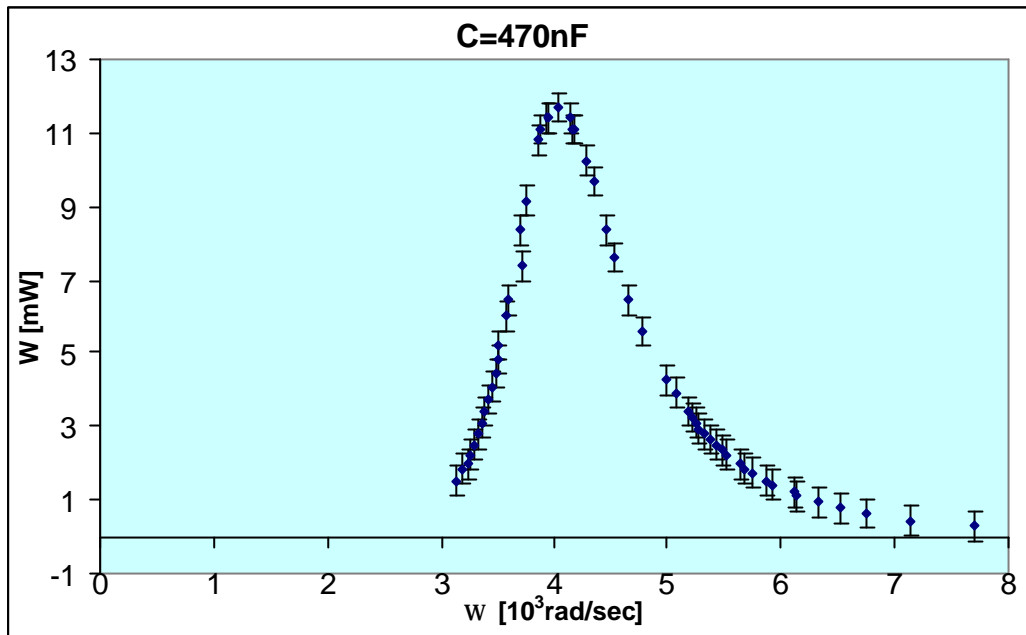


Fig. 10 Curva di risonanza W in funzione di ω

Ripetendo le considerazioni per i due precedenti circuiti si ricava la pulsazione di risonanza, $\omega_0 = 4039 \pm 107$ Rad/sec, le due pulsazioni di mezza altezza, $\omega_A = 3555 \pm 30$ Rad/sec e $\omega_D = 4697 \pm 55$ Rad/sec, ed infine $\Delta\omega = 1142 \pm 85$ Rad/sec

Il fattore di qualità del circuito è $Q = 3,54 \pm 0,35$

Prima di iniziare il confronto tra il fattore di qualità ricavato sperimentalmente e quello atteso teoricamente riportiamo i risultati fin qui ottenuti:

$$\begin{cases} Q_{100nF} = 4,19 \pm 0,09 \\ Q_{220nF} = 3,30 \pm 0,12 \\ Q_{470nF} = 3,54 \pm 0,35 \end{cases} \quad (42)$$

Bisogna ora confrontare i valori ricavati tramite la (34) con quelli previsti dalla (34').

Per fare ciò entra in gioco il problema della resistenza del circuito e quale valore inserire nella (34'). In virtù dei risultati del paragrafo precedente, assumeremo come valori delle resistenze, quelli ottenuti, non in condizioni di risonanza ma tramite lo studio delle curve di resistenza in funzione delle pulsazioni. Si potrebbe infatti inserire il valore misurato dal tester ma questa resistenza, come emerge dalle curve su citate, non renderebbe veritiero il confronto.

Inoltre è necessario conoscere il valore dell'induttanza, valore ricavato sperimentalmente. Per ora ci limitiamo a sfruttare i risultati del paragrafo successivo riportando di seguito i valori misurati dell'induttanza per i tre circuiti

$$\begin{cases} L_{100nF} = 130 \pm 7mH \\ L_{220nF} = 139 \pm 12mH \\ L_{470nF} = 130 \pm 13mH \end{cases} \quad (43)$$

Riportiamo anche i valori misurati delle resistenze

$$\begin{cases} R_{100nF} = 420 \pm 30\Omega \\ R_{220nF} = 277 \pm 22\Omega \\ R_{470nF} = 214 \pm 61\Omega \end{cases} \quad (44)$$

Di seguito riportiamo i valori dei fattori di qualità ricavati tramite la (34') con i loro errori, ottenuti servendosi della seguente relazione

$$\Delta Q = Q \cdot \left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \right) \quad (45)$$

$$\begin{cases} Q_{100nF} = 2,72 \pm 0,34 \\ Q_{220nF} = 2,87 \pm 0,43 \\ Q_{470nF} = 2,46 \pm 0,88 \end{cases} \quad (46)$$

Semplicemente per completezza riportiamo i valori dei fattori di qualità calcolati servendosi della misura di resistenza effettuata tramite il tester

$$\begin{cases} Q_{100nF} = 14,87 \pm 0,77 \\ Q_{220nF} = 10,36 \pm 0,47 \\ Q_{470nF} = 6,85 \pm 0,36 \end{cases} \quad (47)$$

Si vede come i risultati discordano tra loro: il valore misurato con il tester si discosta notevolmente, questo è dovuto ad una resistenza complessiva del circuito in funzione che è lontana da quella rilevata a generatore spento; è dunque determinante il contributo della resistenza interna del generatore e del circuito tutto.

Le discrepanze, invece, tra le (42) e le (46) dipendono dal fatto che la resistenza, nell'intervallo tra le frequenze di mezza altezza, non si mantiene costante ma, come già discusso, varia. Questo rende

difficile la stima del valore di R che bisogna utilizzare nella (34') perchè in essa si suppone una costanza della resistenza del circuito al variare della frequenza; costanza che, come visto, non viene rispettata; infatti le variazioni non sono del tutto trascurabili.

4. Misure di induttanza

Nel precedente paragrafo si è fatto uso delle misure di induttanza per calcolare il fattore di qualità. In questo paragrafo ci proponiamo di ricavare queste misure, i loro errori, dare una stima di L e confrontarla con il valore fornito dal costruttore.

Per fare ciò consideriamo la (28) che qui riportiamo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Dalla quale si ricava

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} \quad (48)$$

E l'errore sulle misure è dato dalla seguente relazione

$$\Delta L = L \cdot \left(2 \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} + \frac{\Delta C}{C} \right) \quad (49)$$

Ai fini del calcolo del valore dell'induttanza del circuito riportiamo di seguito i valori della pulsazioni di risonanza ricavate nel precedente paragrafo che indicheremo con

ω_{0i} con $i = 1,2,3$ indicando la pulsazione di risonanza rispettivamente del primo ($C_1 = 100\text{nF}$), secondo ($C_2 = 220\text{nF}$) e terzo ($C_3 = 470\text{nF}$) circuito.

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{01} = 8765 \pm 31Hz \\ \mathbf{w}_{02} = 5686 \pm 109Hz \\ \mathbf{w}_{03} = 4039 \pm 107Hz \end{cases} \quad (50)$$

Essendo i valori delle capacità dei condensatori noti con un errore del 5% possiamo calcolare il valore dell'induttanza servendoci della (48) e gli errori servendoci della (49) riportiamo i risultati di seguito

$$\begin{cases} L_{100nF} = 130 \pm 7mH \\ L_{220nF} = 139 \pm 12mH \\ L_{470nF} = 130 \pm 13mH \end{cases} \quad (51)$$

Vediamo come le misure sono “consistenti” cioè le differenze $|L_i - L_j|$ sono confrontabili con gli errori sulle misure stesse.

Allora per dare una stima del valore dell'induttanza eseguiamo una media pesata dei tre valori; a tal proposito introduciamo il “peso” $w_i = \frac{1}{\Delta_i^2}$ dove Δ_i è l'errore sulla induttanza.

La stima della induttanza sarà allora data da

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^3 w_i L_i}{\sum_{i=1}^3 w_i} \quad (52)$$

Mentre l'errore sulla media pesata è dato dalla seguente relazione

$$\overline{\Delta L} = \frac{\sum_{i=1}^3 w_i \Delta L_i}{\sum_{i=1}^3 w_i} \quad (53)$$

Allora il valore medio dell'induttanza con il proprio errore è $\bar{L} = 132 \pm 10mH$.

Il valore fornito dal costruttore è $L = 115 mH$ con un errore del 5%, il valori sono tra loro in buon accordo, la lieve differenza di valore la si potrebbe attribuire al fatto che la resistenza interna

dell'amperometro è comunque un avvolgimento di spire che dunque presenta una, anche se piccola, induttanza.

Conclusioni

Vediamo come dall'analisi dei dati è emerso un interessante particolare, che ha permesso di rilevare un andamento non costante della resistenza interna del generatore la quale varia al variare della frequenza.

Come si vede dalle curve di figura 8 questo andamento non sembra casuale ma regolato da una opportuna legge in cui sembrano entrare in gioco anche i valori delle capacità dei condensatori, i quali sembrerebbero essere la causa della traslazione delle curve. I calcoli dei fattori di qualità nei limiti degli errori dovuti alla non costanza della resistenza totale del circuito hanno confermato le previsioni teoriche.

Interessante è la buona stima dell'induttanza presente nel circuito; infatti, nota l'induttanza dovuta alla bobina, si può avere una idea dell'induttanza dovuta alla resistenza dell'amperometro.

L'esperienza ha fornito un interessante spunto di riflessione dovuto al funzionamento del generatore stesso.

Bibliografia

1. G. Cortini – S. Sciuti “ Misure di apparecchi di fisica ”
2. R. Ricamo “Guida alle sperimentazioni di fisica II ”
3. Costa “ Curve di risonanza di un circuito RLC serie ”
4. Appunti del corso di laboratorio di fisica II prof. M. Lattuada
5. J. R. Taylor “ Introduzione all’analisi degli errori ”