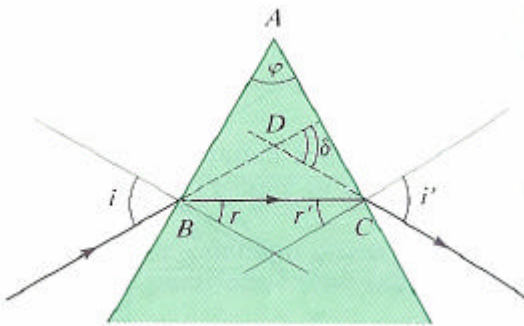


## Determinazione dell'indice di rifrazione di un prisma di vetro con uno spettroscopio.

Fisichella Vincenzo

### ✓ Cenni Teorici.

Quando un fascio di luce incide sulla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti diversi, da origine ad un fascio riflesso e ad un fascio che penetra nel secondo mezzo. Il raggio luminoso che penetra nel secondo mezzo viene deviato: si dice che viene *rifratto*. Il raggio incidente, quello riflesso e quello rifratto giacciono tutti nello stesso piano. L'angolo di rifrazione dipende dalle proprietà dei due mezzi e dall'angolo del raggio incidente.



Adesso ci proponiamo di studiare analiticamente cosa accade quando un raggio di luce colpisce la superficie di un prisma di materiale rifrangente, per esempio vetro. Indichiamo con  $f$  l'angolo del prisma e supponiamo che il piano del prisma sia, come in figura, normale al suo spigolo. Il raggio considerato subisce la rifrazione una volta in B, nel passare dall'aria al vetro, e una volta in C, nel passare dal vetro all'aria. In B si

ha:

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r \quad (1)$$

ed in C:

$$\text{sen } r' = \frac{1}{n} \text{ sen } i' \quad (2)$$

avendo indicato con  $n$  l'indice di rifrazione del prisma rispetto all'aria per la frequenza della radiazione usata. Il raggio che emerge dal prisma è deviato, rispetto al raggio incidente, di un angolo

$$d = i - r + i' - r' \quad (3)$$

come si vede considerando il triangolo BCD e osservando che l'angolo in B è  $(i - r)$ , quello in C è  $(i' - r')$  e quello in D è  $(\varphi - d)$ . La (3) si può anche scrivere:

$$d = i + i' - \varphi \quad (4)$$

dato che dal triangolo ABC si ha:

$$j + \left(\frac{p}{2} - r\right) + \left(\frac{p}{2} - r'\right) = p \quad (5)$$

ossia:

$$j = r + r' \quad (6)$$

Vediamo adesso come varia l'angolo di deviazione  $d$  in funzione dell'angolo di incidenza  $i$  della luce sul prisma, e precisamente cerchiamo se esiste un valore di  $i$  per cui  $d$  è minimo. A tale scopo calcoliamo la derivata di  $d$  rispetto ad  $i$ : differenziando la (4) si ha:

$$dd = di + di' \quad (7)$$

dato che  $f$  è costante. Per esprimere  $di'$  a mezzo di  $di$ , differenziamo le (1) e (2):

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$

$$\cos r' \, dr' = \frac{1}{n} \cos i' \, di'$$

da cui tenendo conto della (6),

$$di = n \frac{\cos r}{\cos i} \, dr = n \frac{\cos r}{\cos i} (-dr')$$

$$dr' = \frac{1}{n} \frac{\cos i'}{\cos r'} \, di'$$

$$di' = -\frac{\cos r'}{\cos i'} \frac{\cos i}{\cos r} \, di$$

che introdotta nella (7) da:

$$\frac{dd}{di} = 1 - \frac{\cos r'}{\cos i'} \frac{\cos i}{\cos r} \quad (8)$$

La (8) è nulla per  $i = i'$  e  $r = r'$  ossia quando il percorso del raggio è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'angolo  $f$  del prisma. Il corrispondente valore di  $d$ , che da ora in poi indicheremo con  $d_m$  si ottiene dalla (4) ponendo  $i = i'$

$$d_m = 2i - j \quad (9)$$

e rappresenta la minima deviazione che il raggio può subire passando attraverso il prisma considerato. L'angolo di rifrazione corrispondente alla deviazione minima si ottiene dalla (6) ponendo  $r = r'$  ossia  $r = j/2$ . Se l'indice di rifrazione è noto, il corrispondente angolo di incidenza si ricava dalla (1)

$$i = \text{arc sen} \left( n \text{ sen} \frac{j}{2} \right)$$

e la (9) può essere usata per prevedere il valore di  $d_m$ . Se invece è noto  $d_m$  si può far uso della (9) per ricavare  $i$ :

$$i = \frac{d_m + j}{2}$$

e ricordando che  $i$  ed  $r$  sono legati dalla (1) si ottiene

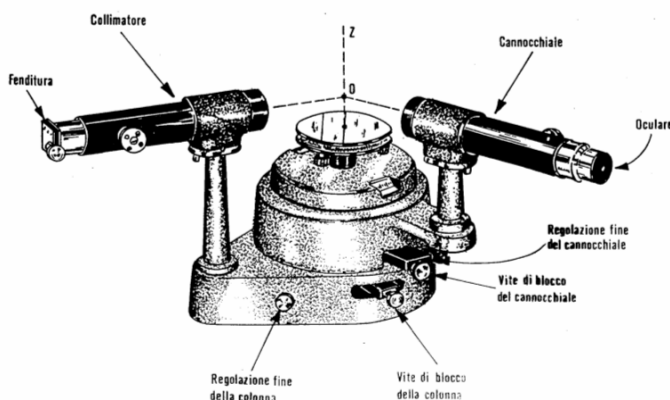
$$n = \frac{\text{sen} \frac{d_m + j}{2}}{\text{sen} \frac{j}{2}} \quad (10)$$

che rappresenta la relazione che consentirà di determinare l'indice di rifrazione del prisma in questo esperimento.

### ✓ *Descrizione dell'Esperienza.*

Questa esperienza si svolge in due fasi; la fase iniziale è dedicata alla *messa a punto dello spettroscopio*, quella finale alla *esecuzione delle misure*.

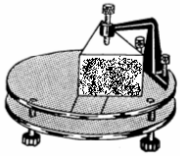
#### 1. *Messa a punto dello Spettroscopio.*



Lo spettroscopio è uno strumento che consente la visione di righe spettrali di una determinata sorgente luminosa, questo è formato da un collimatore, una piattaforma rotante, un cannocchiale rotante e ovviamente un prisma. Il collimatore ha il compito di rendere paralleli i raggi che provengono dalla sorgente e che passano attraverso una fenditura posta sul piano focale della lente convergente interna al collimatore. Il cannocchiale deve formare un'immagine virtuale alla distanza della visione distinta quando è colpito dai raggi paralleli uscenti dal prisma. Pertanto si capisce che collimatore e cannocchiale devono essere sullo stesso asse ottico e quindi la piattaforma deve giacere sul piano ottico che permetta di distinguere le righe prodotte dal prisma posto su di essa. In primo luogo si mette a fuoco la croce di riferimento dell'oculare e si punta col cannocchiale un oggetto

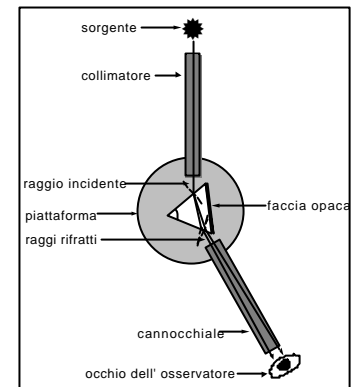
convergente interna al collimatore. Il cannocchiale deve formare un'immagine virtuale alla distanza della visione distinta quando è colpito dai raggi paralleli uscenti dal prisma. Pertanto si capisce che collimatore e cannocchiale devono essere sullo stesso asse ottico e quindi la piattaforma deve giacere sul piano ottico che permetta di distinguere le righe prodotte dal prisma posto su di essa. In primo luogo si mette a fuoco la croce di riferimento dell'oculare e si punta col cannocchiale un oggetto

lontano (l'ideale sarebbe all'infinito) mettendolo a fuoco. Dopo aver fatto stabilizzare la sorgente luminosa si passa alla regolazione del collimatore allineando a questo il cannocchiale in modo da osservare la fenditura e tramite la vite presente nel collimatore mettere a fuoco l'immagine. È importante anche l'ampiezza della fenditura, grandi ampiezze non permettono di centrare perfettamente la fenditura sulla croce, piccole ampiezze danno righe poco visibili.



La messa in piano della piattaforma è un'operazione più delicata: segnato il valore per cui il cannocchiale si trova allineato col collimatore e montata la piattaforma ad un'altezza che permette ai raggi di attraversare a metà il prisma, bisogna ruotare di  $90^\circ$  verso

sinistra il cannocchiale e subito dopo ruotare la piattaforma finché la faccia del prisma non si trovi a  $45^\circ$  con l'asse ottico; in questo modo si avrà l'immagine della fenditura riflessa sul cannocchiale e ciò permette, alzando o abbassando la piattaforma, di centrare l'immagine sulla croce. Le stesse operazioni vanno ripetute ruotando il cannocchiale di  $180^\circ$  finché la piattaforma non sarà allineata ovvero fino a quando l'immagine non sarà centrata in altezza sia osservandola da destra che da sinistra. In fine resta il posizionamento del prisma; questa è un'operazione relativamente semplice infatti affinché i raggi rifratti siano osservabili è bene che il fascio incidente formi un angolo ampio rispetto alla normale della faccia in esame e quando tale angolo sarà corretto attraverso il cannocchiale saranno visibili le righe; a questo punto bloccare la piattaforma, lo spettroscopio è pronto per l'esperimento.



## 2. Esecuzione delle Misure.

Ho condotto l'esperienza utilizzando una lampada al mercurio e la prima operazione effettuata, dopo aver constatato la presenza delle righe, è stata la determinazione dell'angolo per cui si verifica la minima deviazione, operazione che ho effettuato mediante la rotazione della piattaforma finché lo spostamento delle fenditure non ha invertito la direzione del moto. Fissata saldamente la piattaforma ho cominciato a rilevare gli angoli, destro e sinistro, delle prime quattro righe:

?	$J_L$	$J_R$
Giallo	$46,18^\circ \pm 0,017^\circ$	$226,08^\circ \pm 0,017^\circ$
Verde	$46,50^\circ \pm 0,017^\circ$	$226,42^\circ \pm 0,017^\circ$
Blu	$47,42^\circ \pm 0,017^\circ$	$227,33^\circ \pm 0,017^\circ$
Viola	$48,67^\circ \pm 0,017^\circ$	$228,58^\circ \pm 0,017^\circ$

Il passo successivo è stato quello di determinare lo zero delle misure precedentemente rilevate e pertanto dopo aver rimosso il prisma dalla piattaforma,

preoccupandomi che questa non si muovesse, ho centrato l'immagine della fenditura sulla croce ed ho rilevato i seguenti angoli:

$J_L^0$	$J_R^0$
$354,97^\circ \pm 0,017^\circ$	$174,95^\circ \pm 0,017^\circ$

Per questioni pratiche ho preferito fare i calcoli utilizzando il valore  $J_L^0 = -5,05^\circ \pm 0,017^\circ$ . Utilizzando la relazione:

$$d_m = \frac{(J_L - J_L^0) + (J_R - J_R^0)}{2}$$

che non è altro che un'operazione di media, e successivamente la (10) sapendo che  $f$  è  $60^\circ$  ho tabulato i valori di deviazione minima e indice di rifrazione per ciascuna riga:

?	$d_m$	n
Giallo	$51,180^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,650 \pm 0,024$
Verde	$51,510^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,653 \pm 0,024$
Blu	$52,425^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,662 \pm 0,024$
Viola	$53,675^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,674 \pm 0,024$

Gli errori su  $d_m$  sono stati calcolati mediante la:

$$\begin{aligned} \Delta d_m &= \left| \frac{\partial d_m}{\partial J_L} \cdot e_{J_L} \right| + \left| \frac{\partial d_m}{\partial J_L^0} \cdot e_{J_L^0} \right| + \left| \frac{\partial d_m}{\partial J_R} \cdot e_{J_R} \right| + \left| \frac{\partial d_m}{\partial J_R^0} \cdot e_{J_R^0} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot 0,017 \right| \cdot 4 = 0,034^\circ \end{aligned}$$

a differenza degli errori su  $n$  per cui è bene fare una breve precisazione, infatti differenziando logicamente la (10) otteniamo l'errore relativo massimo su  $n$ :

$$dn/n = d \ln \sin[(\delta_m + f)/2] - d \ln \sin(f/2) \cong$$

$$\Delta n/n = \operatorname{ctg}[(\delta_m + f)/2][(\Delta \delta + \Delta f)/2] - \operatorname{ctg}(f/2) \Delta f/2$$

e poiché  $\Delta \delta$  e  $\Delta f$  sono all'incirca uguali, ponendo  $\Delta \delta = \Delta f = \varepsilon$ , si ha:

$$\Delta n/n = \operatorname{ctg}[(\delta_m + f)/2] \varepsilon - \operatorname{ctg}(f/2) \varepsilon/2$$

Dalla (9) risulta che  $(\delta_m + f)/2$  è l'angolo di incidenza che è sempre minore di  $90^\circ$  e, poiché  $\delta_m$  ed  $f$  sono positivi, possiamo scrivere:

$$0 < \text{ctg}[(\delta_m + f)/2] < \text{ctg}(f/2)$$

per cui sicuramente deve essere:

$$|\Delta n/n| < \text{ctg}(f/2)\epsilon/2$$

Per il prisma che ho utilizzato nell'esperienza l'angolo  $f = 60^\circ$  allora:

$$|\Delta n/n| < 0,86\epsilon \quad \text{e quindi} \quad |\Delta n| \leq 0,86n\epsilon$$

Lo spettroscopio del laboratorio ha  $\epsilon = 1' = 0,017^\circ$  pertanto, sostituendo alla precedente relazione i rispettivi indici di rifrazione di ciascuna riga, ottengo le indeterminazioni riportate in tabella.

Successivamente ho preso una seconda serie di misure allo scopo di far coincidere  $J_L^0$  e  $J_R^0$  rispettivamente con  $0^\circ$  e  $180^\circ$ : in questo caso non potevo permettermi di ruotare la piattaforma pertanto ho tolto il prisma, puntato il cannocchiale sulla fenditura per rilevare b zero ed in questo punto ho fissato lo zero del nonio della piattaforma. Ricordando i dati presi precedentemente ho posizionato il cannocchiale nella posizione (approssimativa) in cui si vedano le righe della serie precedente ed a questo punto, posizionato il prisma sulla piattaforma, ho cercato l'angolo di deviazione minima ruotando lentamente ed accuratamente il prisma e non la piattaforma e trovato quest'angolo ho fissato il prisma. Da questo punto in poi ho condotto l'esperienza in maniera analoga alla precedente serie di dati trovando i valori che riporto nella tabella qui di seguito:

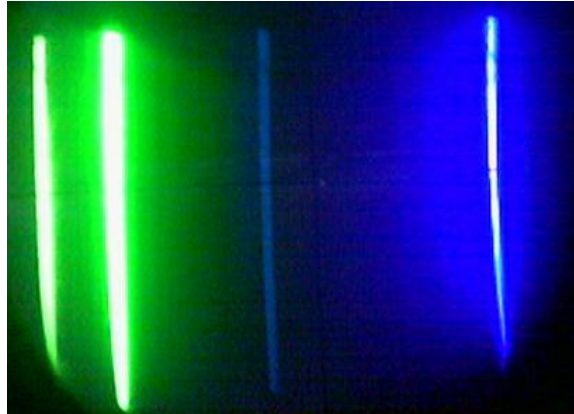
?	$J_L$	$J_R$	$d_m$	n
Giallo	$51,33^\circ \pm 0,017^\circ$	$231,23^\circ \pm 0,017^\circ$	$51,280^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,651 \pm 0,024$
Verde	$51,70^\circ \pm 0,017^\circ$	$231,62^\circ \pm 0,017^\circ$	$51,660^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,655 \pm 0,024$
Blu	$52,50^\circ \pm 0,017^\circ$	$232,45^\circ \pm 0,017^\circ$	$52,475^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,663 \pm 0,024$
Viola	$53,85^\circ \pm 0,017^\circ$	$233,80^\circ \pm 0,017^\circ$	$53,825^\circ \pm 0,034^\circ$	$1,676 \pm 0,025$

Ovviamente anche tutti gli errori sono stati calcolati in maniera analoga. Mettendo a confronto le due serie di misure si nota una differenza solo sulla terza cifra decimale:

?	n (I serie)	n (II serie)
Giallo	$1,650 \pm 0,024$	$1,651 \pm 0,024$
Verde	$1,653 \pm 0,024$	$1,655 \pm 0,024$
Blu	$1,662 \pm 0,024$	$1,663 \pm 0,024$
Viola	$1,674 \pm 0,024$	$1,676 \pm 0,025$

✓ *Conclusioni.*

Mediante fotocamera digitale sono riuscito a rilevare le immagini delle fenditure in entrambe le serie di dati:



esse sono rispettivamente la prima e la seconda serie di dati ed in ordine possiamo distinguere le righe: gialla, verde, blu e viola. Da notare che nella prima serie la fotocamera non è riuscita a visualizzare la riga del viola.

In definitiva, dal valore degli indici di rifrazione calcolati posso affermare, in merito a quanto tabulato a pagina 1153 del secondo volume di fisica “Serway”, che il materiale in esame è *vetro Flint*. Inoltre vorrei ricordare la dipendenza dell’indice di rifrazione dalla lunghezza d’onda infatti, come si evince dai dati sopra tabulati, al diminuire della lunghezza d’onda si ha un aumento del suddetto indice.

✓ **Bibliografia.**

**Serway – Beichner** – *Fisica volume II*, EdiSES, Napoli.

**Amaldi – Bizzarri** – *Fisica Generale II*, Zanichelli, Bologna.

**R. Ricamo** - *Guida alle sperimentazioni di fisica*, Ambrosiana, Milano.

**J. R. Taylor** - *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli, Bologna.

**F. Tyler** - *A laboratory manual of physics*, E. Arnould, London.

**Prof. N. Arena** - *Appunti del corso di laboratorio II*, A.A. 2003-2004.