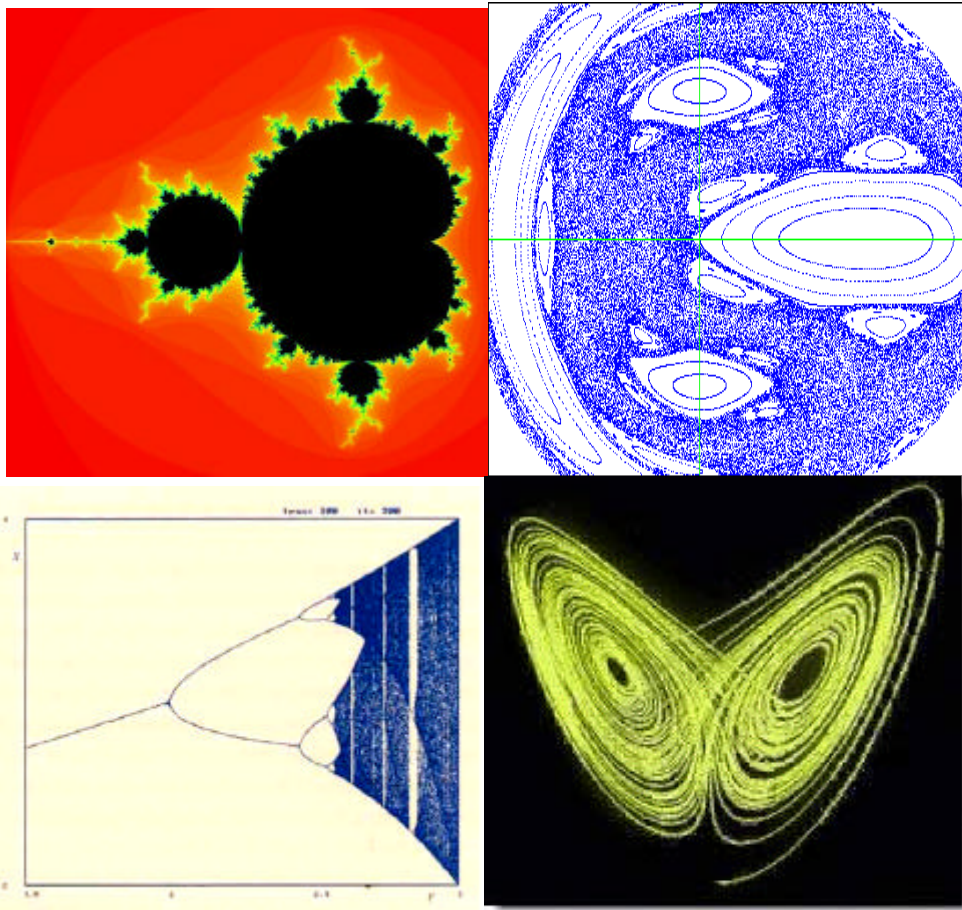




Università degli Studi di Catania
Facoltà di Scienze MM. FF. NN.
Corso di Laurea in Fisica

Il caos



di Roberta Sinatra

*Storia della Fisica ed Epistemologia
Anno Accademico 2003/04
Prof. Salvo Pappalardo*

Indice

Il problema del determinismo	3
I pionieri del caos	5
La scoperta di Lorenz	6
Mappe di Poincaré e teorema K.A.M	9
I frattali	10
Il modello di May e la mappa logistica	12
Bibliografia	16

*“Prima del mare e della terra e del cielo che tutto ricopre,
unico e indistinto era l’aspetto della natura in tutto l’universo,
e lo dissero Chaos, mole informe e confusa,
nient’altro che peso inerte,
ammasso di germi discordi di cose mal combinate”
Ovidio, Metamorfosi*

Caos è una parola che non gode davvero di buona reputazione, nell’uso corrente quotidiano. In effetti, *caos* è associato ad avvenimenti disordinati, incontrollati, che procedono in maniera confusa senza alcuna regola o logica apparenti.

Proviamo innanzitutto a ricondurre il termine “caos” al suo significato originario. Esso deriva dal greco antico, $\chi\alpha\omicron\varsigma$, ed indicava “ciò che si spalanca in tutta la sua ampiezza”: il vuoto dello spazio cosmico. Nelle cosmogonie antiche e all’epoca dei Presocratici, questa desolazione e questo vuoto costituiscono il sostrato primigenio di ogni divenire, da cui in definitiva potrà scaturire il cosmo (l’ordine). Tra caos e cosmo, tra essere informe e strutture ordinate, esiste dunque un intimo rapporto di omogeneità. Questa interpretazione del caos ha conservato la sua validità sino alla filosofia moderna. Schelling vede nel caos l’*unità metafisica delle potenze*. Nel mondo moderno, invece, la lingua parlata ha svalutato il concetto di caos e lo impiega solo per indicare un indesiderato stato di degrado dell’ordine.

Il problema del determinismo

Adesso anche la scienza si è appropriata del termine caos, ma per usarlo in un’accezione diversa da quelle finora citate. Nell’immaginario comune, desta stupore che la parola “caos” possa avere qualcosa a che fare con la scienza. Infatti, dopo la scoperta di leggi generali che regolano il moto delle stelle e dei pianeti, l’avvicinarsi delle stagioni, dopo la grande sintesi operata da Newton, la quale implica che la dinamica che regge il moto dei corpi è esattamente deterministica (il futuro è determinato in maniera univoca dallo stato presente), a poco a poco si è fatta strada la convinzione illuministica che l’uomo potesse essere in grado, almeno in linea di principio, di prevedere e magari controllare lo sviluppo degli eventi futuri.

A tal proposito, citiamo Pierre-Simone de Laplace:

<<Un’intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all’analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell’universo e quelli dell’atomo più leggero: nulla le risulterebbe incerto, l’avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all’astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza>>.

Questo brano è diventato celebre come il manifesto del determinismo scientifico. Tale fiducia illuministica nelle capacità dell'uomo di predire sempre meglio l'evoluzione degli eventi, si è rafforzata nei secoli successivi, che sono stati testimoni di entusiasmanti conquiste scientifiche: il trionfo della meccanica, la scoperta dell'elettromagnetismo, l'avvento della relatività.

Tuttavia le affermazioni di Laplace riguardo la possibilità di prevedere nei minimi dettagli il futuro dell'universo non sono né vere né verosimili. Esiste, infatti, un incredibile numero di sistemi che presentano il fenomeno della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Per tali sistemi una conoscenza incompleta dello stato iniziale determina un aumento considerevole dell'errore sulle nostre previsioni. Così come è stato ampiamente dimostrato negli ultimi trent'anni, ciò vale per molti sistemi reali, spesso regolati anche da leggi relativamente semplici. Il fenomeno per cui regole perfettamente deterministiche possono produrre un moto assolutamente imprevedibile prende il nome di *caos deterministico*.

La nascita del caos appare essere una grande frattura epistemologica. Infatti, tutti i canoni positivisti che eleggevano il determinismo a caratteristica fondamentale della ricerca scientifica, sembrano crollare. Anche la causalità rigorosa della meccanica classica viene messa in discussione dopo aver dimostrato che l'evoluzione di molti sistemi dinamici non lineari, rappresentazione di gran parte dei sistemi che operano nel mondo macroscopico, è imprevedibile. Tuttavia non bisogna dimenticare che in realtà, quella che è avvenuta trent'anni fa è solo una riscoperta del caos, che comunque non mina alla base il determinismo vero e proprio, inteso in senso ontologico, così come ha fatto la meccanica quantistica, ma piuttosto ciò che è messo in discussione è il determinismo gnoseologico. Infatti, i sistemi cosiddetti caotici sono pur sempre descritti da equazioni differenziali non lineari, ma pur sempre equazioni; la maggiore differenza con i sistemi lineari studiati da secoli dalla meccanica classica sta nell'estrema sensibilità alle condizioni iniziali che i primi manifestano. Quindi l'errore che viene commesso sulla conoscenza dello stato iniziale del sistema, seppur piccolo, viene amplificato se si cerca di prevedere il futuro o di risalire al passato del sistema stesso, tanto da far apparire come del tutto casuale e priva di regole la sua traiettoria o la sua evoluzione. Quindi, istante per istante, un sistema macroscopico caotico, a differenza di un sistema quantistico, si trova sempre in uno stato perfettamente definito e non in una sovrapposizione di stati. Sono i nostri limiti (gnoseologici) che non ci permettono di verificarlo. I sistemi dinamici, dunque, mettono in discussione la predicibilità. Il caos sancisce la nostra incapacità di fare previsioni esatte sull'evoluzione di un intero sistema macroscopico o delle sue parti. Il fatto che il futuro non sia praticamente prevedibile da nessuna intelligenza fisica, così come prospettava Laplace, non implica nulla sull'ontologia del sistema e sul determinismo delle leggi che lo governano.

I pionieri del caos

Per quanto il caos sia considerato la terza grande rivoluzione del XX secolo, dopo la relatività e la meccanica quantistica, la sua esistenza era stata supposta già alla fine dell'800. Henri Poincaré e Jacques Hadamard, due scienziati vissuti a cavallo tra il XIX e il XX secolo, sono tra i primi a far notare la possibile forte dipendenza di un sistema dalle condizioni iniziali.

Hadamard era impegnato nello studio delle geodetiche, le linee più brevi tra due punti di una certa configurazione geometrica di alcune particolari superfici a curvatura infinita. Egli si accorge che ogni differenza, anche minima, nelle condizioni iniziali di due geodetiche che restano a distanza finita può produrre una variazione di grandezza arbitraria nell'andamento finale della curva. L'ambito di applicazione delle teorie di Hadamard è comunque complesso e la sua trattazione può sembrare più oscura di quelle che invece sono le parole di Poincaré riguardo lo stesso argomento. Poincaré in *Science et méthode* (1908) scrive:

<<Una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non sempre è così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.>>

Queste asserzioni furono espresse dal fisico francese in seguito a diversi studi sul problema dei tre corpi, di cui dimostra la non integrabilità, e sui sistemi gassosi in cui le molecole sono approssimate a sfere dure che effettuano tra di loro urti perfettamente elastici. A proposito di sistemi di gas monoatomico, egli aveva osservato:

<<Come dobbiamo rappresentare un recipiente pieno di gas? Innumerevoli molecole animate da grandi velocità solcano questo recipiente in tutte le direzioni; a ciascun istante, urtano le pareti o si scontrano tra loro; e questi urti hanno luogo nelle condizioni più diverse. Ciò che in questo caso ci colpisce non è la piccolezza delle cause, ma soprattutto la loro complessità. Eppure, il primo elemento è ancora presente e ha un ruolo importante. Se una molecola fosse deviata, verso sinistra o verso destra rispetto alla sua traiettoria, di una quantità piccolissima, paragonabile al raggio d'azione delle molecole di un gas, essa

eviterebbe una collisione, oppure la subirebbe in condizioni diverse, e questo farebbe variare, magari di 90 o di 180 gradi, la direzione della sua velocità dopo l'urto. E non è tutto: abbiamo visto che è sufficiente deviare la molecola, prima dell'urto, di una quantità infinitamente piccola, perché essa sia deviata, dopo l'urto, di una quantità finita.>>

Poincaré ha inoltre il merito di essere stato il primo a supporre il fenomeno di dipendenza dalle condizioni iniziali anche per i sistemi turbolenti:

<<Perché i meteorologi hanno tanta difficoltà a prevedere il tempo con un certo grado di esattezza? Perché i rovesci di pioggia, e le tempeste stesse, ci sembrano arrivare a caso, tanto che molte persone trovano del tutto naturale pregare per avere la pioggia o il bel tempo, mentre riterrebbero ridicolo invocare un'eclisse con la preghiera? Noi vediamo che le grandi perturbazioni si producono generalmente nelle regioni in cui l'atmosfera è in equilibrio instabile. I meteorologi sono ben consapevoli che questo equilibrio è instabile, che un ciclone nascerà da qualche parte, ma dove? Non sono in grado di dirlo; un decimo di grado in più o in meno in un punto qualunque e il ciclone scoppia qui e non là, porta le sue devastazioni in contrade che sarebbero state risparmiate. Se si fosse conosciuto questo decimo di grado, si sarebbe potuto prevederlo in anticipo, ma le osservazioni non erano né abbastanza ravvicinate né abbastanza precise, ed è per questo che tutto sembra dovuto all'intervento del caso.>>

Per numerosi sistemi, dunque, secondo Poincaré, non siamo in grado di fare previsioni precise a lungo termine, e questo giustifica la nozione empirica di caso. Per quanto le idee di Poincaré fossero geniali, esse erano troppo qualitative e così come Leonardo da Vinci non sarebbe stato in grado di costruire un aereo, allo stesso modo Poincaré non riuscì a sviluppare in maniera più rigorosa teorie sulle turbolenze. Le sue osservazioni furono dimenticate e rimasero inascoltate fino a quando, negli anni '60 un meteorologo, Edward Lorenz, mediante simulazioni su calcolatore, dimostrò quanto Poincaré aveva previsto.

La scoperta di Lorenz

Alcuni sostengono che la “fortuna” del caos come nuovo campo di ricerca sia essenzialmente dovuta ai calcolatori che a partire dagli anni '60 furono utilizzati per le elaborazioni numeriche. Per quanto il ruolo delle macchine sia stato eccessivamente esaltato, certo è che Lorenz non sarebbe mai venuto a capo della sua scoperta senza il Royal McBee, una “selva” di valvole e circuiti che occupava quasi interamente l'intero spazio del suo ufficio. Lorenz lavorava nel reparto di meteorologia del Massachusetts Institute of Technology e simulava su quella macchina particolari condizioni meteorologiche mediante una sistema di equazioni differenziali. A quel tempo

l'utilizzo dei computer si fondava sull'assunto che un input approssimativamente preciso desse un output allo stesso modo approssimativamente preciso. Un po' quello che si pensava sull'errore che si commetteva sulla conoscenza delle condizioni iniziali per prevedere il futuro. Insomma vigeva, classicamente, una fede nell'approssimazione e nella convergenza.

Con quella stessa fede, un giorno dell'inverno del 1961, Lorenz volle esaminare una particolare fase di un'elaborazione più lunga. Piuttosto che ricominciare da principio il calcolo, egli introdusse nel calcolatore il valore numerico delle condizioni iniziali prendendolo dallo stampato precedente. Poi si allontanò aspettando che la macchina desse il risultato. Il computer avrebbe dovuto duplicare esattamente l'elaborazione fatta precedentemente. Quando Lorenz tornò, invece, trovò che le nuove condizioni meteorologiche divergevano in maniera veramente rapida tanto da non avere alcuna somiglianza dopo poco tempo. Egli si rese conto quasi immediatamente dell'errore di funzionamento: lo stampato da cui aveva preso le condizioni iniziali per la nuova elaborazione dava sei cifre decimali: 0,506127. Il valore che Lorenz introdusse nel calcolatore ne aveva solo tre: 0,506 ritenendo che un'approssimazione alla quarta cifra non avesse nessuna incidenza. Un piccolo errore invece aveva dato un risultato catastrofico. Lorenz avrebbe potuto pensare che ci fosse qualcosa di sbagliato nel funzionamento della macchina o nel suo modello. Invece, per quanto le sue dodici equazioni fossero "parodie grossolane" della meteorologia terrestre, egli credeva che cogliessero l'essenza dell'atmosfera reale e quel giorno decise che "la previsione meteorologica a lungo termine fosse impossibile".

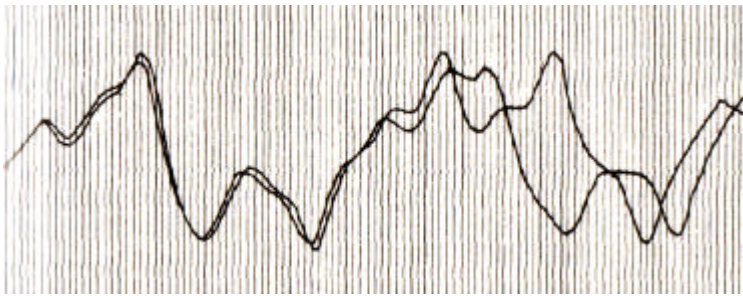


Figura 1 Divergenza di due condizioni meteorologiche di Lorenz che differivano per la quarta cifra decimale nelle condizioni iniziali.

meteorologica a lungo termine fosse impossibile".

Lorenz chiamò il fenomeno di forte dipendenza dalle condizioni iniziali *effetto farfalla*, prendendo il nome dalla efficace analogia che aveva costruito per far comprendere l'imprevedibilità della meteorologia: <<Basta il battito di ali di una farfalla in Amazonia, per scatenare un tornado in

Texas>>.

In seguito Lorenz riuscì a descrivere il comportamento complesso di un sistema convettivo con solo tre equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = s(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

in x , y , z e nei parametri S , r e b . Le tre equazioni, pur non essendo lineari, sembrano innocue all'occhio di un fisico. Tuttavia esse mostrano elevata sensibilità alle condizioni iniziali. Fissati i parametri S , r , b , Lorenz faceva integrare al calcolatore le equazioni ad intervalli di tempo arbitrari. Per delineare un quadro sulla base dei dati, Lorenz rappresentò passo dopo passo in un sistema a tre dimensioni la serie dei valori di x , y , z . Così la sequenza di numeri produsse una sequenza di punti che definivano una traiettoria continua, una registrazione del comportamento del sistema. La traiettoria poteva condurre in un luogo e poi arrestarsi, cosa che significava che il sistema si era assestato in uno stato stazionario, in cui le variabili per la velocità e la temperatura non mutavano più. Oppure la traiettoria poteva formare un anello che si ripeteva di continuo, cosa che significava che il sistema si era assestato in un modello di comportamento che si ripeteva periodicamente. Quello che invece venne fuori fu la celebre immagine:

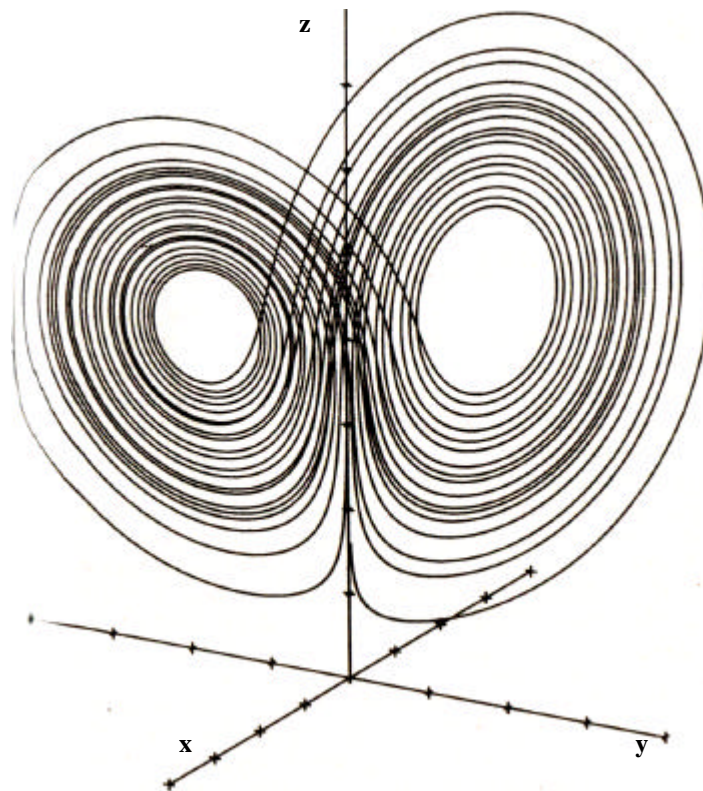


Figura 2
Attrattore di Lorenz.

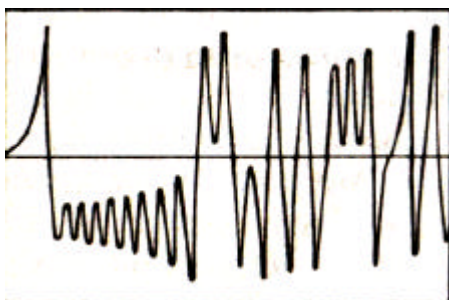


Figura 3 Una variabile spaziale dell'attrattore in funzione del tempo

che prende il nome di attrattore di Lorenz. E' un diagramma che rivela un'infinita complessità. Il movimento rimane sempre entro certi limiti, non uscendone mai, ma neppure diventando ripetitivo. La figura nel suo disordine, dal momento che nessun punto e nessun sistema di punti si ripete mai, segnalava un nuovo ordine. Il caos si può anche

osservare, ma meno efficacemente, graficando i valori mutevoli di una variabile in funzione del tempo. In fig. 3 ve ne è un esempio.

Quello di Lorenz è quello che si dice un attrattore ed è in assoluto il primo ad essere stato rappresentato.

Per studiare il caos è utile rappresentare l'evoluzione di un sistema nel suo spazio delle fasi. Come per l'attrattore di Lorenz, ci si accorge che la traiettoria di un sistema caotico nello spazio delle fasi è limitata ad una regione ma la riempie tutta, senza mai ripetere uno stesso insieme di punti. Disegnare immagini di attrattori quindi non è una cosa banale, poiché tipicamente quello che ne veniva fuori era uno scarabocchio scuro con una struttura interna che non poteva essere vista dall'esterno. Gli studiosi del caos si servirono allora di due strumenti matematici diversi, uno più "vecchio", l'altro recentissimo.

Mappe di Poincaré e teorema K.A.M.

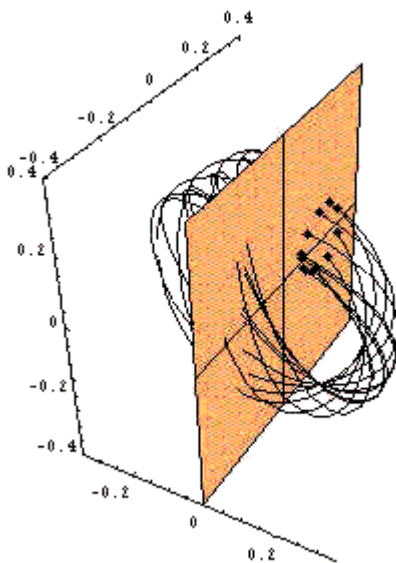


Figura 4 Sezione di un piano con un toro. Per quanto uno spazio tridimensionale come quello dell'immagine non possa essere uno spazio delle fasi, l'immagine chiarisce il concetto di sezione di Poincaré

Lo studio delle traiettoria nello spazio delle fasi era già utilizzato nelle trattazioni di nella meccanica classica. Tuttavia era difficile averne una rappresentazione grafica, poiché, a partire da sistemi con due gradi di libertà, la dimensione dello spazio delle fasi diviene maggiore di tre (se n sono i gradi di libertà, lo spazio delle fasi ha dimensione $2n$). Poincaré penso che sarebbe stato utile effettuare in questo spazio $2n$ -dimensionale delle sezioni con particolari piani (cfr. figura 4). Vengono fuori le cosiddette sezioni o mappe di Poincaré. Per quanto da un lato le sezioni di Poincaré sottraggano una parte di informazione, da un altro permettono di risalire a particolari caratteristiche delle traiettorie dei sistemi. Se si prendono per esempio le sezioni di Poincaré della traiettoria disegnata da una particella soggetta al

potenziale di Henon-Heiles, che è definito come:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + I\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) \quad (2)$$

si osservano due tipi di regione:

- una regione cosiddetta regolare, la cui sezione di Poicaré è un'ellisse o una specie di curva chiusa
- una regione detta caotica, la cui presenza sulla sezione di Poicaré è segnalata da tutta una serie di punti distribuiti in maniera casuale.

Partendo da osservazioni su queste particolari mappe, Kolmogorov, Arnold, Moser enunciarono un particolare teorema che prese il nome di Teorema K.A.M.:

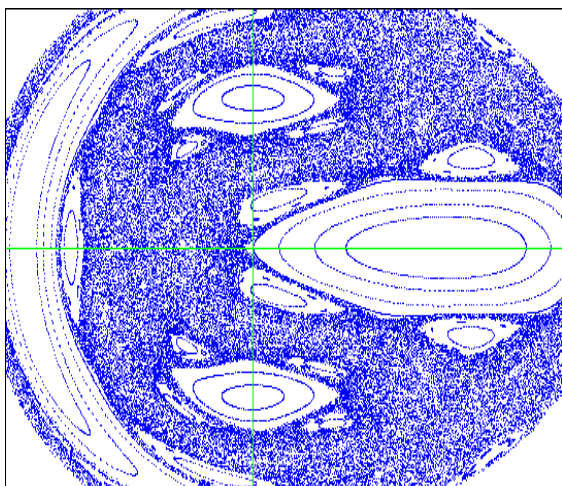


Figura 5 Sezione di Poincaré per una particella soggetta al potenziale di Henon Heiles. Si possono distinguere facilmente la regione regolare, contraddistinta dalle parti bianche per via della presenza dei tori, e la regione caotica, contraddistinta da fitti nugoli di punti.

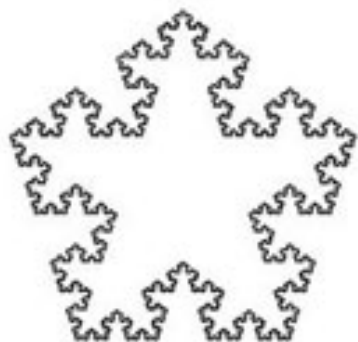
lo spazio delle fasi di sistemi non integrabili ma conservativi (come quello della particella sottoposta al potenziale di Henon-Heiles) è diviso in due regioni

- 1) regione regolare: il sistema si muove su tori n -dimensionali
- 2) regione caotica: le traiettorie non rimangono sui tori, ma esplorano lo spazio delle fasi, conservando tuttavia l'energia.

I frattali

L'altro strumento utilizzato per studiare sistemi caotici è nato ed è stato sviluppato contemporaneamente all'effetto farfalla di Lorenz: si tratta dei frattali.

Figura 6 Isola (o fiocco) di Koch



Nel 1967 sulla rivista *Science* compariva un articolo dal titolo "Quanto è lunga la linea costiera della Gran Bretagna?", firmato da un certo Benoît Mandelbrot, matematico francese che lavorava presso la IBM. La domanda potrebbe sembrare innocente per un geografo, ma in realtà, sostiene Mandelbrot, non esiste una risposta esatta. Il suo ragionamento era il seguente: supponiamo di eseguire la nostra misurazione da un aereo a diecimila metri di altezza; la precisione con cui facciamo la nostra misura non è delle migliori poiché da una tale distanza non si vedono molti rientri e baie. Ripetiamo la nostra misura percorrendo la costa a piedi, utilizzando un compasso

con apertura del metro. Rileveremo molto più particolari, molti dettagli prima invisibili. Se procediamo con un compasso di apertura qualche centimetro, i dettagli rilevabili saranno ancora migliori. E così via possiamo procedere utilizzando unità di misura sempre più piccole fino ad arrivare all'atomo. Nel mondo fisico, probabilmente, questo processo di misure seguenti deve ad un certo punto finire, ma nel mondo astratto del matematico ciò non è detto. Poiché ciò significa che la corrispondente sequenza di misure aumenta all'infinito, ne deriva che non esiste una risposta precisa dal punto di vista matematico del problema della lunghezza della linea costiera, ma solo risposte arbitrarie, che non possono neppure ritenersi approssimazioni della realtà.

Un'entità matematica analoga alla linea costiera non misurabile di Mandelbrot è offerta da una figura geometrica studiata per la prima volta da Helge von Koch. La figura (cfr. figura 6) viene

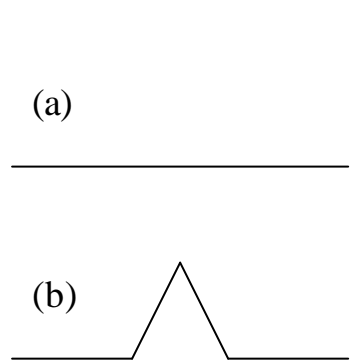


Figura 7 Costruzione del fiocco di Koch

chiamata *isola di Koch* o *fiocco di Koch*. Da lontano l'isola di Koch può apparire come un semplice pentagono. Man mano che ci si avvicina, ci si accorge che presenta maggiori dettagli, che aumentano man mano che se ne incrementa la "risoluzione". L'isola di Koch può essere costruita a partire da un segmento (figura 7^a). Si divide questo segmento in tre parti e se ne sostituisce la parte centrale con due segmenti ciascuno di lunghezza pari ad un terzo del segmento originario (figura 7b). Questi due segmenti i in tre parti, il pezzo centrale sostituito, ecc. (cfr. figura 7).

Il processo è condotto all'infinito. Si può dimostrare che la lunghezza della frontiera dell'isola di Koch è infinita. Come può una superficie finita avere un perimetro infinito? Ciò è dovuto al fatto che la curva di frontiera cambia direzione infinite volte in uno spazio infinitesimo: si entra in una nuova dimensione.

Il fiocco di Koch, come tante altre immagini diventate famose (cfr. figura 6), è quello che Mandelbrot ha definito frattale. Un frattale è un oggetto che mostra autosimilarità, vale a dire che esso ha la stessa struttura a qualunque scala lo si osservi, e in più ha dimensione non intera. Quest'ultima caratteristica, di fatto, gli ha procurato il nome. Prendiamo una figura D -dimensionale e dividiamola in N parti uguali. Definiamo rapporto di similitudine r tra l'intera figura e la singola parte (cioè il rapporto tra la dimensione lineare del tutto e quella della parte):

$$r = \sqrt[D]{N} \tag{4}$$

Per un segmento $D=1$ e il rapporto di similitudine è N , se esso è stato diviso in N parti. Per un quadrato $D=2$ e il suo rapporto di similitudine è \sqrt{N} . Prendiamo una parte dell'isola di Koch. Nel processo di riproduzione si ha che il singolo segmento viene sostituito da quattro segmenti,

quindi $N = 4$. Ciascuno di questi piccoli segmenti corrisponde ad un terzo della lunghezza del segmento originario, per cui si ha che $r = 3$. Quindi secondo la (4) si ha che:

$$3 = 4^{\sqrt{D}}$$

O passando ai logaritmi

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618$$

Quindi la curva di Koch è un'entità matematica di dimensione frazionaria.

Un altro frattale celebre, creato proprio dal padre della geometria frattale, è l'insieme di Mandelbrot, raffigurato in fig.X. L'insieme di Mandelbrot si ottiene dall'iterazione:

$$Z_{n+1} = (Z_n)^2 + C \quad (5)$$

dove C è un numero complesso e Z_n il risultato all'iterazione n -esima, ovviamente anch'esso complesso. Le condizioni iniziali dell'iterazione non sono importanti per la costruzione dell'insieme. Per ogni punto del piano complesso, C , si effettuano un numero fissato di iterazioni (che eliminino il transitorio). All'ultima iterazione si vede se Z ha modulo minore di 1. In caso affermativo il punto C viene colorato in nero, altrimenti esso rimane bianco. L'insieme di Mandelbrot è un frattale molto importante perché è stato dimostrato essere collegato a tutti i processi dinamici.

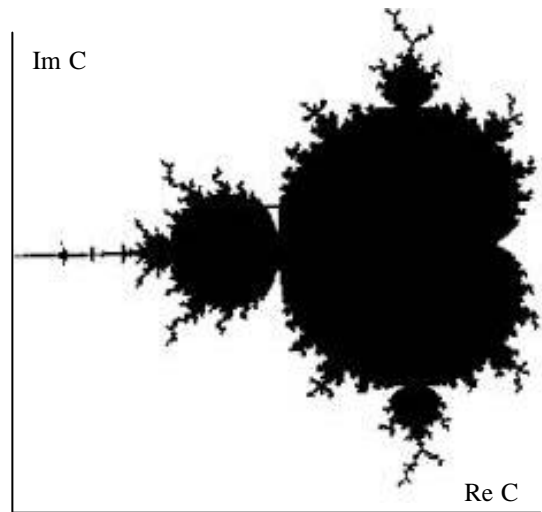


Figura 8 Insieme di Mandelbrot

Il modello di May e la mappa logistica

Vogliamo descrivere un particolare modello dinamico, il modello di May, diventato celeberrimo per la sua caoticità, insospettabile se ci si ferma ad osservare la legge che lo descrive. Il sistema è non lineare, possiede dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali e dà luogo alla rappresentazione di una mappa particolare a dimensione non intera: la mappa logistica.

Il modello è a tempo discreto e l'equazione che lo descrive è:

$$x_{t+1} = f(x_t) = rx_t[1 - x_t] \quad (5)$$

L'equazione vuole descrivere, in termini semplificati, l'andamento temporale di una popolazione di pesci nello stagno. x rappresenta il numero individui presenti nello stagno al tempo t . Il suo valore è

- se $3 \leq r < 4$, il sistema non converge più ad un unico valore, ma comincia ad oscillare tra più valori. Per $r = 3$ si ha quello che si chiama unto di biforcazione. Man mano che il valore di r cresce, si hanno successivi punti di biforcazione. Si parla di punti di ciclo-2, ciclo-4, ciclo-8, ecc. Al valore $r = 3,569946$ appare il caos. Non c'è più convergenza, non ci sono più punti attrattori. Gli x_n saltano, imprevedibilmente, da un punto all'altro (cfr. figura 9d).

Per analizzare i vari comportamenti che si hanno al variare di r (soprattutto per $r > 3$), si costruisce la cosiddetta *mappa logistica* o *diagramma di biforcazione*. In un diagramma cartesiano, si rappresenta sull'asse delle ascisse il valore di r e sull'asse delle ordinate i valori di x , dai quali si è eliminato il transitorio. Questo è ciò che si ottiene:

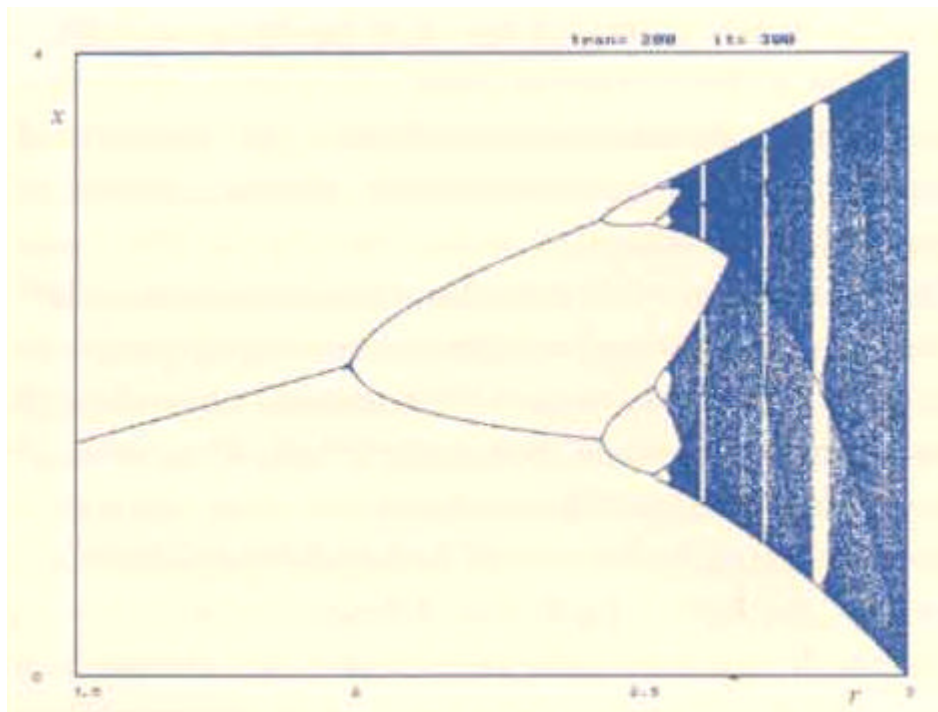


Figura 10 Mappa logistica o diagramma di biforcazione

Si vede come a partire dal valore critico $r = 3,569946$, chiamato anche *numero di Feigenbaum*, l'attrattore non è più un punto ma un'intera zona. Da questo andamento si intuisce l'origine del caos deterministico: sebbene i valori di x_n siano stati ottenuti attraverso l'applicazione ripetuta di una funzione (meccanismo puramente deterministico), questi sembrano susseguirsi in modo apparentemente casuale, senza regolarità o ricorrenza.

Nota conclusiva

Dagli anni '60 ad oggi i sistemi che mostrano comportamenti caotici sono diventati sempre più importanti poiché la loro presenza è stata riscontrata negli ambiti di studio di svariate discipline: non solo fisica e matematica, ma anche biologia, chimica, medicina, economia, sociologia e tante altre. In questo lavoro si è cercato di mettere in luce quale sia stata la portata innovativa degli studi sul caos: l'abbandono del determinismo, nuovi metodi per la risoluzione di sistemi non lineari, l'elaborazione della geometria frattale. Abbiamo anche cercato però di dare un'idea del rigore tecnico che, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, caratterizza questo tipo di studi.

Uno degli ambiti applicativi più fecondi di questa scienza, di cui non abbiamo avuto modo di parlare, è sicuramente quello dei sistemi complessi. Lo studio di questi sistemi prevede anch'esso il coinvolgimento di più discipline e i suoi risultati hanno ricaduta immediata nella vita di tutti i giorni. Ne sono un esempio i network (neurali, sociali, biologici, elettrici, ecc.).

“Il caos è un ordine che non si riesce a vedere” (Henri Bergson)

Bibliografia

James Gleick, *Caos*, Rizzoli

Keith Devlin, *Dove va la matematica*, Bollati Boringhieri

Friedrich Cramer, *Caos e ordine*, Bollati Boringhieri

David Ruelle, *Determinismo e predicibilità*, n.82 di "Pour la science" agosto 1984

Vincent Croquette, *Determinismo e caos*, n.62 di "Pour la science" dicembre 1982

Michel Baranger, *The meaning of the Chaos Revolution*

<http://www.galileimirandola.it/frattali/>

<http://matematica.unibocconi.it/caos/home.htm>

<http://www.webfract.it/>

<http://hypertextbook.com/chaos/>