

La formulazione della teoria di relatività e le sue  
conseguenze epistemologiche

Tesina di Storia della Fisica  
a cura di Antonio Massimiliano Mio

Anno Accademico 2003-2004  
Docente: Prof. Salvatore Pappalardo

# Indice

<b>1</b>	<b>Contesto scientifico e culturale</b>	<b>2</b>
1.1	Quadro culturale . . . . .	2
1.2	La perdita del concetto di invarianza di scala . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Prima del 1905</b>	<b>4</b>
2.1	Relatività galileiana . . . . .	4
2.2	La teoria del campo elettromagnetico . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Cenni di relatività ristretta</b>	<b>9</b>
3.1	Caratteri generali . . . . .	9
3.2	Le trasformazioni di Lorentz . . . . .	10
3.2.1	Il mondo di Minkowski . . . . .	12
3.3	Sincronizzazione degli orologi e simultaneità . . . . .	13
3.3.1	Poincarè e la simultaneità . . . . .	16
3.3.2	La soluzione di Einstein . . . . .	17
3.3.3	Il paradosso dei gemelli . . . . .	18
3.4	Centralità del processo di misura in Schlick e Bridgman . . . . .	20
3.5	Relazionismo o sostanzialismo? . . . . .	22
3.6	Il ruolo dell'osservatore . . . . .	23
3.7	L'equivalenza fra massa ed energia . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Cenni di relatività generale</b>	<b>26</b>
4.1	Il principio di equivalenza . . . . .	26
4.2	Il criterio della perfezione interna . . . . .	27
4.3	Lo spazio curvo di Riemann . . . . .	28
	<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>

# Capitolo 1

## Contesto scientifico e culturale

### 1.1 Quadro culturale

Con la fine dell'800 e l'inizio del '900 si assiste in Europa all'affermarsi del decollo dell'industria per mezzo della seconda rivoluzione industriale. Sia in Italia che nel resto del continente si forma una nuova società di massa, basata su idee liberal-democratiche.

Dal punto di vista sociale, un'ondata di scoperte sconvolge in maniera radicale la visione del mondo sia dell'uomo comune che dell'intellettuale.

Si assiste infatti all'utilizzo a livello di massa non solo del telegrafo, che tutto sommato era già utilizzato da tempo, ma anche del telefono e della radio. L'ingresso di queste invenzioni nel mercato contribuirà alla rivalutazione del concetto comune di simultaneità. Inoltre il concetto di spazio, di tempo e di velocità viene rivisto grazie alle nuove macchine, le automobili e gli aerei, che in un certo senso *diminuiscono* le distanze consentendo spostamenti sempre più rapidi e conseguentemente prospettive fino ad allora inimmaginabili.

Dal punto di vista scientifico vi è da una parte Albert Einstein che, come verrà descritto nei capitoli successivi, formulerà una teoria destinata a cambiare la visione del cronotopo, della materia e dell'energia. Dall'altra, Planck che elaborerà la teoria dei quanti. Le due teorie porranno di fatto definitivamente fine al tentativo di unificare le leggi che governano l'universo con il solo ausilio della fisica newtoniana.

La scienza invade anche l'immaginario umano per mezzo della psicoanalisi di Freud; Max Weber getta le basi delle cosiddette scienze sociologiche; Wittgenstein conduce i suoi studi sulla *filosofia del linguaggio*. Quest'ultimi tre personaggi sottolineano, in pratica, la relatività della conoscenza e il carattere soggettivo o pragmatico della verità. [1]

### 1.2 La perdita del concetto di invarianza di scala

Uno degli aspetti più sconcertanti delle scoperte scientifiche avvenute a cavallo dei due secoli suddetti è che queste vanno ben oltre quello che è normal-

mente soggetto alla nostra intuizione anzi, per certi versi la contraddicono. Il motivo è semplice: quello che noi possiamo vedere è spesso misurabile (con le unità di misura che caratterizzano il mondo quotidiano) con variazioni che non superano usualmente i tre o i quattro ordini di grandezza. E' più che plausibile quindi (ed è spesso confermato dall'esperienza entro certi limiti) che gli oggetti che ci circondano obbediscano a delle leggi fisiche pressoché simili. Gli oggetti descritti dagli scienziati in questo periodo vanno invece dai  $10^{-16}m$  dei quark ai  $10^{26}m$  dell'universo.

La cosa più sorprendente però non è tanto la diversità di grandezza degli oggetti analizzati tanto l'incapacità dell'uomo di collocare questi oggetti entro le proprie strutture mentali. Tale incapacità può essere attribuita al fatto che le stesse strutture mentali proprie di ogni individuo si sono formate da percezioni dirette del sensibile. è quindi comprensibile che nuovi concetti, che necessiterebbero di nuovi schemi mentali, incontrino difficoltà nell'essere accettati come validi sia dallo scienziato, sia tanto più dall'uomo comune.

Di fatto la nostra intuizione è impreparata, forse anche geneticamente, ad assumere strutture organizzative nuove perché entro le nostre immediate esperienze l'escursione tra il grande e il piccolo non porta a variazioni di grande rilievo [2]. Lo stesso Leibniz sosteneva che un *frammento di materia* potesse essere pensato come un giardino di piante o come uno stagno pieno di pesci. Il nostro intuito ci porterebbe a pensare che entrambe le cose, piccole o grandi che siano, si comportino secondo le stesse leggi, quelle a cui sono soggetti i corpi sotto nostra diretta osservazione. Allo stesso modo si potrebbe pensare che i concetti di corpo rigido, forza, punto materiale, *spazio tridimensionale e tempo* propri della nostra esperienza siano applicabili ad ogni altra realtà fisica. Le scoperte degli ultimi due secoli hanno definitivamente confutato tale ipotesi.

Noi stessi, come Leibniz, possiamo immaginare dopotutto un giardino più piccolo del nostro ma non riusciamo a capacitarci pienamente del perché tale piccolo giardino, in generale una particella, non si debba comportare come il giardino di casa. La materia, così come l'energia o la carica, non è infinitamente frazionabile, non perlomeno con l'usuale significato del termine (tale è in sintesi il risultato delle teorie di Planck). Così come è inutile il tentativo di determinare la traiettoria della particella se non in termini probabilistici. Viene cioè meno il principio esatto, deterministico che sembrava indissolubilmente legato alla Scienza e che anzi prima del novecento era forse una delle principali caratteristiche che rendeva la Scienza tale.

Non è semplice accettare queste nuove teorie. Lo stesso Einstein riferendosi alla teoria di Planck scrive [3]:

*“... sono incline a pensare che i fisici non si appagheranno a lungo di una descrizione indiretta del reale come questa, anche se si dovesse giungere a conciliare in modo soddisfacente con il postulato della relatività generalizzata...”*

Inoltre, cosa forse ancora più importante, cambiano le categorie su cui si basa la conoscenza stessa, le strutture su cui si vanno a collocare le esperienze umane: non più spazi tridimensionali, tempi invarianti, ma spazi *curvi* a  $n$  dimensioni (anche 11), tempi dipendenti dal sistema di riferimento e conseguente rivoluzione del concetto di contemporaneità.

## Capitolo 2

# Prima del 1905

### 2.1 Relatività galileiana

La prima legge di Newton non distingue tra particelle ferme e particelle che si muovano con velocità costante. Consideriamo infatti una particella ferma rispetto a noi sulla quale non agiscano forze. In base alla prima legge di Newton questa rimarrà ferma. Consideriamo ora un sistema di riferimento che si muova con velocità costante rispetto a noi. Per un osservatore in questo secondo riferimento la particella si muove con velocità costante. Notiamo quindi che per la particella continua a valere la prima legge di Newton.<sup>1</sup>

Come si potrebbe fare per capire se siamo noi e la particella fermi e il secondo osservatore in moto con velocità costante o, viceversa, se il secondo osservatore è fermo e noi ci muoviamo con la particella? In linea di principio alcuni esperimenti svolti nei due riferimenti potrebbero dare dei risultati diversi in forma fra di loro; Se ciò avvenisse sarebbe possibile distinguere i due sistemi di riferimento e vederne se ce ne uno privilegiato rispetto a tutti gli altri.

Supponiamo ad esempio che un treno si muova su un binario dritto ed orizzontale con velocità costante  $v$ . Consideriamo un vagone del treno e all'interno di questo stabiliamo un *sistema di riferimento*. Un sistema di riferimento è un insieme di coordinate ferme le une rispetto alle altre. Non importa dove posizioniamo l'origine all'interno del nostro sistema di riferimento. Cambieranno le posizioni degli oggetti sul vagone, ma la loro velocità resterà identica.

Chiamiamo  $S'$  il riferimento appena descritto. Allo stesso modo stabiliamo un sistema di riferimento  $S$ , fermo rispetto al binario.

Se sul vagone c'è una palla ferma rispetto ad esso questa viene vista da  $S$  muoversi con velocità costante  $v$ . Vale la prima legge di Newton in tutti e due i casi. Se la palla viene lasciata cadere essa accelera con accelerazione  $\vec{g}$  in entrambi i sistemi di riferimento, con la sola differenza che in  $S$  la traiettoria della palla descrive una parabola poiché questa possiede una velocità iniziale  $v$  rispetto a questo sistema di riferimento. La stessa identica cosa con ruoli invertiti accade se la palla si trova solidale con  $S$  (con l'unica differenza che il sistema di riferimento  $S$  si muove con velocità  $-v$  rispetto a  $S'$ ).

---

<sup>1</sup>è da notare che se il secondo riferimento accelerasse rispetto a noi l'osservatore su di esso vedrebbe la particella accelerare verso di lui. Ma sulla particella non agiscono forze, quindi per un tale riferimento non varrebbe la prima legge di Newton.

Ciò che si può dedurre è che nessun esperimento meccanico compiuto da noi (la misura del periodo di un pendolo o di un corpo attaccato a una molla, lo studio degli urti tra due corpi, ecc.) potrebbe aiutarci a distinguere i due riferimenti e dirci se c'è ne uno che si può considerare in modo assoluto *fisso* e l'altro *in moto*. In particolare si nota che le leggi di Newton valgono allo stesso modo sia per S che per S'.

Un sistema di riferimento in cui valgano le leggi di Newton è detto sistema di riferimento inerziale.

A partire dalle considerazioni fatte sopra possiamo dire che:

1. Tutti i sistemi di riferimento che si muovono con velocità costante rispetto a un sistema di riferimento inerziale sono anch'essi sistemi di riferimento inerziali;
2. il *moto assoluto* non può essere rivelato.

Questo principio era ben noto a Galileo, a Newton e a molti altri già nel XVII secolo, anche se Newton aveva in qualche modo sentito l'esigenza di relazionare le sue tre leggi ad un sistema di riferimento privilegiato, assoluto. A tal proposito Einstein scrive:

*“...Benché siano riconosciuti gli sforzi di Newton per presentare il suo sistema come necessariamente condizionato dall'esperienza e per introdurre il minor numero possibile di concetti che non potessero riferirsi ai dati diretti dell'esperienza<sup>2</sup>, tuttavia egli ha formulato il principio di Spazio e Tempo. Gliene s'è fatto spesso, di questi tempi, un rimprovero. Ma proprio su questo punto Newton è particolarmente conseguente su se stesso. Egli aveva riconosciuto che le grandezze geometriche osservabili (distanze di punti materiali fra di loro) e la loro corsa nel tempo non caratterizzavano completamente i movimenti dal punto di vista fisico. Egli dimostra questa deduzione con la celebre esperienza del secchio. Esiste di conseguenza, al di fuori delle masse e delle loro distanze variabili nel tempo, ancora qualche cosa che è determinante per gli avvenimenti: questo <<qualche cosa>> egli lo concepisce in rapporto allo <<spazio assoluto>>. Riconosce anche, se le sue leggi del movimento hanno un senso, che lo spazio deve avere una specie di realtà fisica, una realtà della stessa natura dei punti materiali e delle loro distanze.*

*Questa precisa conoscenza dimostra ugualmente la saggezza di Newton e l'esistenza di un lato debole della sua teoria; perché l'impostazione logica di essa sarebbe certo più soddisfacente senza questo concetto vago: in questo caso non si troverebbero nella legge che elementi il cui rapporto con le percezioni è del tutto evidente...”*

Newton introduceva una distinzione tra i moti reali, che avvenivano nello spazio e nel tempo assoluto, e moti relativi, che erano quelli rilevati dalle misure sensibili. Facendo tale distinzione Newton aveva introdotto una dicotomia che

<sup>2</sup>Newton come Einstein sosteneva che le leggi della natura sono fatte in modo da essere le più semplici possibili e che i concetti che gli scienziati devono scegliere come base per le proprie teorie devono essere, oltre che semplici, i minimi indispensabili

rimandava in modo evidente all'Iperuranio platonico.

Per cercare di risolvere il problema che aveva sollevato Newton cercò di trovare una corrispondenza fra spazio assoluto e spazio sensibile e fra tempo assoluto e tempo sensibile. Riguardo alla corrispondenza temporale Newton disse che il tempo assoluto poteva essere misurato a partire dall'osservazione di fenomeni regolari (le oscillazioni dei pendoli ad esempio). Il problema più rilevante stava invece nel correlare le distanze sensibili con il *sistema di riferimento assoluto*, la cui esistenza è dedotta da Newton attraverso la celebre esperienza del secchio. Questo per Newton resta un problema irrisolto; lo stesso ammetteva che potrebbe non essere possibile ottenere una corrispondenza completamente soddisfacente tra moti osservati e moti veri nello spazio assoluto e che potrebbe non esistere un oggetto solidale con tale sistema di riferimento.

Nonostante ciò la teoria più accettata dal punto di vista scientifico era quella galileiana che negava l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato. Verso la fine del XIX secolo però tale teoria veniva messa nuovamente in discussione. A riaprire nuovamente questa diatriba era stata la teoria sull'elettromagnetismo ad opera di Maxwell. Secondo tale teoria la luce, così come ogni radiazione elettromagnetica, è un'onda. Fino alla metà del 1800 l'analisi dei fenomeni ondulatori era condotta su sistemi meccanici. In tali sistemi, come sappiamo, l'onda ha bisogno di un mezzo per propagarsi. Lungo una corda, per esempio, un'onda ha bisogno del materiale di cui è costituita la corda; affinché si propagino le onde sonore è necessario che sia presente dell'aria.

A partire da queste considerazioni si pensava quindi che anche la luce avesse bisogno di un mezzo per propagarsi. Si pensava che questo mezzo dovesse essere molto rigido perché le onde sulle corde si propagano con velocità direttamente proporzionale alla radice della tensione applicata su di essa e le misure della velocità della luce mostravano che essa doveva essere molto elevata. Tale mezzo, a cui veniva attribuito il nome di *etere*, doveva però essere praticamente privo di attrito, poiché i corpi che si muovevano in esso, i pianeti e le stelle fisse, non sembravano rallentare (il movimento dei pianeti appariva perfettamente spiegato attraverso le leggi della gravitazione newtoniana).

Gli sforzi scientifici di fine '800 furono quindi rivolti a determinare la velocità della terra rispetto a l'etere. Uno dei più celebri fra tali esperimenti fu quello condotto da Michelson nel 1881 e poi ripetuto con maggior precisione da Morley nel 1887.

Le 4 equazioni della teoria di Maxwell avevano predetto che la velocità delle onde elettromagnetiche doveva essere:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 m/s \quad (2.1)$$

è da notare che nulla in questa espressione indica rispetto a quale sistema si riferisca tale valore. Si pensava dunque che questo valore fosse quello misurabile rispetto all'etere e che una misura della velocità della luce in un altro riferimento, in accordo con la relatività galileiana, avrebbe rivelato una misura pari a  $c + v$  dove  $v$  è la velocità dell'etere rispetto al riferimento in cui avviene la misura.

In base a queste aspettative fu eseguita l'esperienza di Michelson-Morley che, diversamente da quanto ci si aspettava, mostrò la assoluta invarianza di tale velocità al variare del sistema di riferimento. Il primo postulato della relatività ristretta, di fatto, si basa sull'osservazione di questa invarianza.

## 2.2 La teoria del campo elettromagnetico

Diamo qui una piccola descrizione qualitativa dell'apporto dato da Clerk Maxwell al progresso scientifico, poiché è proprio a partire dalle scoperte e dagli studi del fisico scozzese che Einstein trova la necessità di formulare la teoria della relatività.

Parte del lavoro di Maxwell comincia da alcune osservazioni fatte da Faraday, che trovano in lui una più completa rielaborazione matematica. Uno dei concetti più rilevanti introdotti dal fisico scozzese fu quello di campo. Il meccanismo che descriveva l'interazione fra due particelle può essere in modo esemplificativo descritto in questo modo: la particella 1 esercita un'azione (determinata ad esempio dalla legge di Coulomb nel caso in cui le due particelle siano cariche elettricamente) sulla particella 2, la quale (come descritto dalla terza legge di Newton) ne esercita una uguale in modulo e in direzione, ma opposta in verso, nei confronti della prima. Una descrizione equivalente del fenomeno può essere data seguendo l'idea di campo di Maxwell: la particella 1 cambia le caratteristiche dello spazio intorno ad essa. Tale spazio è caratterizzato da una nuova proprietà, il campo elettrico, che da informazioni sulla forza che verrà esercitata sulla particella 2 non appena questa venga *inserita* in questo spazio dotato di campo. A partire dal concetto di campo, Maxwell formulò le sue quattro leggi che stanno alla base di tutta la teoria elettromagnetica e che si possono considerare in un certo senso, l'analogo delle leggi di Newton per l'elettromagnetismo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (2.5)$$

C'è da dire che la rottura che queste equazioni determinavano nei confronti della meccanica classica non era del tutto chiara neppure a Maxwell che tentò anzi talvolta di giustificare le sue quattro leggi per mezzo della meccanica, senza però prendere nessuna di queste pseudo-giustificazioni davvero sul serio. Infatti, come ci si può aspettare, nessuna di queste giustificazioni trovarono un reale fondamento.

Di contro si cercò di dedurre le vecchie relazioni fra i punti materiali e la loro inerzia per mezzo delle equazioni di Maxwell, ma neanche questi tentativi furono coronati da successo.

Uno dei risultati più rilevanti della teoria di Maxwell è che ovunque sia presente un campo elettrico variabile è presente un campo magnetico e viceversa. La luce stessa può essere intesa come una perturbazione dello spazio che fa variare campo elettrico e magnetico (un'onda elettromagnetica) che si muove a velocità  $c$ , se essa si propaga nel vuoto. Partendo dall'invarianza formale delle leggi di Maxwell (risulta difficile pensare che in sistemi del tutto *equivalenti* le leggi di Maxwell possano assumere forme diverse) e dalla osservazione sperimentale che la velocità di propagazione della luce nel vuoto rimane invariata al variare del sistema di riferimento, Albert Einstein formulò la teoria della relati-

vità ristretta.

Per questi motivi l'opera di Maxwell può essere considerata il completamento della fisica classica o l'inizio della rivoluzione scientifica che caratterizza i primi decenni del novecento.

## Capitolo 3

# Cenni di relatività ristretta

### 3.1 Caratteri generali

La teoria della relatività ristretta si basa essenzialmente su due postulati:

1. La velocità della luce nel vuoto vale  $c$  in qualunque sistema di riferimento;
2. Ogni legge generale della natura, valida per un sistema di riferimento  $K$ , deve essere valida senza cambiamenti per un sistema di riferimento  $K'$  animato da un movimento di traslazione uniforme in rapporto a  $K$ .

Il primo postulato, che descrive di fatto la costanza di  $c$  nel vuoto, è frutto dell'evidenza sperimentale (si pensi ad esempio all'esperienza di Michelson e Morley). Il secondo è più di natura filosofica. Non c'è motivo di credere che le leggi fisiche abbiano un sistema di riferimento privilegiato (il cosiddetto sistema di riferimento *assoluto*).

La teoria della relatività ristretta segue un metodo analitico: parte cioè dall'osservazione del sensibile per ricavare i suoi assiomi e a partire da questi deduce le sue conseguenze. Ciò si contrappone al metodo costruttivo che dopo aver postulato i propri assiomi (di solito relativamente semplici) cerca di dedurre fenomeni complessi (la teoria cinetica dei gas, ad esempio, segue questo secondo procedimento).

In base alla teoria galileiana precedentemente descritta il tempo aveva un carattere assoluto. Non abbiamo infatti parlato di tempo per  $S$  e tempo per  $S'$  ma abbiamo assunto implicitamente che  $t = t'$ . Anche lo spazio in un certo senso continuava ad essere *assoluto*. Esso infatti è assoluto in un sistema di riferimento e cambia per traslazione da un riferimento  $S$  ad un altro  $S'$ , ma le distanze restano uguali.

Anche in relatività ristretta lo spazio e il tempo sono assoluti in un determinato sistema di riferimento. Ma sono relativi poichè dipendono dal sistema di riferimento scelto, nel momento in cui viene considerato un secondo sistema di riferimento, in moto rispetto al primo. Il cronotopo, nel suo continuo, può essere considerato con quel carattere di absolutezza che secondo la teoria galileiana avevano lo spazio e il tempo separatamente.

A partire dai due postulati sopraccitati si arriva a determinare l'influenza che ha il movimento del sistema di riferimento in moto (anche se solo *convenzionalmente*) sull'andamento degli orologi e sulla forma degli oggetti.

Come semplice esempio si pensi ad un osservatore che si trova sul ciglio di una strada e che vede passare un'automobile (possibilmente che viaggia a velocità paragonabile a quella della luce). Dal tetto dell'automobile parte un raggio di luce che arriva al pavimento. L'abitacolo della vettura è alto  $h$ . All'interno dell'auto il tempo che impiega la luce per attraversare tale percorso è:

$$t = \frac{h}{c} \quad (3.1)$$

Poiché però per un osservatore sul ciglio della strada il sistema in moto con velocità  $v$  ha compiuto un percorso pari a  $v \cdot t'$  egli vedrà la luce percorrere un tragitto pari a:

$$h' = \sqrt{h^2 + (v \cdot t')^2} \quad (3.2)$$

La velocità della luce è, per il primo principio della relatività ristretta, un'invariante nei due sistemi di riferimento e pertanto l'intervallo di tempo misurato dal sistema *fisso* fra i due eventi avvenuti nel riferimento *mobile* è:

$$t' = \frac{h'}{c} = \frac{\sqrt{h^2 + (v \cdot t')^2}}{c} \geq \frac{h}{c} = t \quad (3.3)$$

Un osservatore che si trova solidale con il ciglio della strada è quindi portato a concludere che il tempo nel suo sistema di riferimento scorre più velocemente rispetto a quello che scorre nel sistema di riferimento *in moto*. In realtà il concetto stesso di moto è relativo. Il sistema  $K'$  in cui si trova l'osservatore sul ciglio della strada è in moto rispetto al riferimento  $K$  in cui si trova l'osservatore nell'automobile. L'osservatore nell'automobile, in modo del tutto analogo all'osservatore in  $K'$ , è portato a concludere che il tempo nel suo sistema di riferimento scorre più velocemente rispetto a  $K$ . In realtà questa osservazione è solo apparentemente paradossale. Infatti i due osservatori sono in perfetta simmetria ed equivalenza e quindi non c'è da stupirsi se i risultati che determina  $K$  sono uguali in forma a quelli determinati da  $K'$ , anzi tale simmetria ed equivalenza è proprio imposta dal secondo principio della relatività ristretta.

## 3.2 Le trasformazioni di Lorentz

A partire dai due principi su cui si basa la relatività ristretta, assumendo che le trasformazioni delle coordinate spazio-temporali siano lineari si possono dedurre le seguenti formule per un riferimento  $K$  che vede muovere un riferimento  $K'$  (avendo gli assi coordinati  $\vec{x}'$ ,  $\vec{y}'$  e  $\vec{z}'$  rispettivamente paralleli a  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ ) con velocità relativa  $\vec{u}$  lungo l'asse  $\vec{x}$ :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (3.4)$$

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (3.7)$$

Avendo indicato:

$$\beta = \frac{u}{c} \quad (3.8)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.9)$$

A partire da queste equazioni possiamo estendere i risultati per una qualsiasi velocità relativa  $\vec{u}$  (non necessariamente lungo l'asse  $\vec{x}$ ):

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \quad (3.10)$$

$$\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \beta ct) \quad (3.11)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \quad (3.12)$$

Ove per parallelo e perpendicolare si è inteso rispetto alla velocità  $\vec{u}$ . Conseguenze di queste equazioni sono la dilatazione delle durate e la contrazione delle lunghezze:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (3.13)$$

$$\Delta l = \frac{\Delta l'}{\gamma} \quad (3.14)$$

Ove con  $\Delta l'$  si è indicata la lunghezza di un regolo parallelo ad  $\vec{u}$  e solidale con il sistema  $K'$  (cioè in moto con velocità  $\vec{u}$ ).

Viene così evidenziato un altro risultato notevole e controintuitivo della relatività ristretta: la misura di un regolo che si muove rispetto al riferimento ove viene fatta la misura è in genere contratta di un fattore compreso tra 1 e  $\frac{1}{\gamma}$  (a seconda che la direzione del regolo coincida con la direzione del moto relativo o formi con questa un angolo).

Se si considerano due eventi,  $E_1 = E_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  e  $E_2 = E_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ , si può introdurre la seguente quantità che appare invariante per trasformazioni di Lorentz:

$$I^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (3.15)$$

Tale quantità può considerarsi come l'analogo della distanza nelle trasformazioni di Galileo. Le trasformazioni di Lorentz, da questo punto di vista, possono considerarsi come rotazioni nello spazio-tempo.

In virtù della nuova teoria le vecchie grandezze, quantità di moto, forze, ecc. non mostrano le stesse proprietà (invarianza, conservazione) che avevano in relatività galileiana. Occorre quindi ridefinirle. Cominciamo con la quantità di moto. La quantità di moto  $\vec{p}$  deve essere definita in modo che:

1. negli urti elastici  $\vec{p}$  si conservi;
2. quando  $u/c$  tende a zero,  $\vec{p}$  tende a  $m\vec{u}$

Ove con  $\vec{u}$  abbiamo indicato la velocità della particella della quale vogliamo definire la quantità di moto. Osservando questi due criteri viene definita quantità di moto:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (3.16)$$

Per analogia con le trasformazioni di Lorentz ciò si scrive anche come:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{u} \quad (3.17)$$

avendo indicato con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

La definizione di forza resta formalmente la stessa:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad (3.18)$$

Continua a valere il *teorema delle forze vive*. Da tale teorema si ricava che l'energia cinetica di una particella è:

$$E_c = \gamma mc^2 - mc^2 \quad (3.19)$$

L'ultimo termine della somma algebrica a secondo membro non dipende dalla velocità della particella. La quantità  $mc^2$  è chiamata *energia a riposo* della particella. Questa non è semplicemente una convenzione. Questa energia si manifesta nei fenomeni di decadimento radioattivo e nelle reazioni nucleari sia di fusione che di fissione.

Poc'anzi abbiamo parlato di lunghezza di un regolo. Vogliamo chiarire che nella nostra trattazione anche il concetto di lunghezza va rivisto. In relatività galileiana non vi era alcun problema: la distanza fra due punti poteva essere ricavata in qualsiasi sistema di riferimento in quanto si postulava l'invarianza di tale misura al variare di qualsiasi riferimento (anche non inerziale). La cosa più semplice era dunque effettuare la misura in un sistema di riferimento solidale con l'oggetto di cui si voleva conoscere la lunghezza (o, più in generale, le dimensioni).

L'invarianza delle misure non sussiste invece in relatività ristretta come mostra l'equazione 3.14. Vi è quindi la necessità di definire una procedura che permetta di misurare la lunghezza di un oggetto non in quiete rispetto al riferimento che opera la misura.

La procedura per effettuare tale misura consiste nel considerare due segnali luminosi che partano dagli estremi dell'oggetto contemporaneamente nel riferimento in quiete rispetto al misuratore. La lunghezza sarà desunta dalla differenza di cammino dei due raggi ricavabile dalla differenza temporale fra i loro arrivi.

Abbiamo omesso in questa sede la dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz, ma si vuole sottolineare ancora una volta che essa si basa sulla equivalenza in forma delle leggi fisiche. Pertanto se i due osservatori, ad esempio, hanno due regoli identici  $1_K$  e  $1_{K'}$  quello che dice K del regolo di K', deve dire K' del regolo di K. Ovvero indicata con  $[O]_K$  la misura di O rispetto al sistema di riferimento K, se K dice:

$$\frac{[1_K]_K}{[1_{K'}]_K} = \lambda \quad (3.20)$$

Allora K' deve dire:

$$\frac{[1_{K'}]_{K'}}{[1_K]_{K'}} = \lambda \quad (3.21)$$

### 3.2.1 Il mondo di Minkowski

Le trasformazioni di Lorentz, inquadrate nel contesto della relatività ristretta, evidenziano l'impossibilità di considerare spazio e tempo come due realtà distinte; a tal proposito Hermann Minkowski dichiara:

*"...d'ora innanzi lo spazio in sé e il tempo in sé sono condannati a dissolversi in nulla più che ombra, e solo una specie di congiunzione dei due conserverà una realtà indipendente..."*

Egli afferma che attraverso l'invariante 3.15 le trasformazioni di Lorentz possono essere interpretate come pseudorotazioni. Le considerazioni di Minkowski partono dall'osservare che le equazioni della meccanica di Newton rimangono invariate:

*“...in primo luogo, se sottoponiamo il sistema di coordinate spaziali ad un arbitrario cambio di posizione; in secondo luogo, se modifichiamo il suo stato di moto tramite qualsiasi moto rettilineo uniforme; infine l'origine del tempo non ha alcun ruolo...”*

Notiamo che la prima relazione stabilisce l'invarianza delle leggi della meccanica per rototraslazione del sistema di riferimento (che mantengono invariate in relatività galileiana le distanze); il secondo principio è praticamente il risultato della relatività galileiana.

Come già osservato, mentre in relatività galileiana la distanza invariante è la quantità  $x^2 + y^2 + z^2$ , in relatività ristretta la *distanza* invariante è data dalla 3.15. Quando  $c$  tende ad infinito la meccanica relativistica coincide con quella newtoniana. Dall'analisi delle espressioni che restano invariate per trasformazioni di Lorentz, Minkowski costruisce un modello matematico-geometrico che descrive la relatività ristretta.

In meccanica classica la sezione di spazio-tempo ortogonale all'asse temporale è unica per ogni istante. Nello spazio-tempo di Minkowski, invece, l'asse temporale può assumere diverse inclinazioni, e ad ognuna di esse corrisponde una diversa sezione spaziale. Ciò stabilisce la dipendenza del tempo e delle dimensioni spaziali: osservatori con velocità diverse allo stesso istante vedranno mondi diversi.

Infine l'autore a partire dall'osservazione che:

*“...l'equazione differenziale per la propagazione della luce nel vuoto è invariante rispetto al gruppo  $G_c$ <sup>1</sup>...”*

postula che tutte le leggi della fisica siano invarianti rispetto al gruppo  $G_c$  (analogo del secondo postulato della relatività ristretta di Einstein). Egli chiama tale postulato il *postulato del mondo assoluto*.

### 3.3 Sincronizzazione degli orologi e simultaneità

In prima analisi i risultati della relatività ristretta contraddicono non solo la nostra intuizione ma il nostro stesso senso di coerenza. Com'è infatti possibile, ad esempio, che ciascun osservatore veda l'orologio dell'altro ritardare? Per risolvere questo rompicapo basta tener presente uno dei teoremi che si deducono dalle trasformazioni di Lorentz:

due orologi sincronizzati in un sistema di riferimento non sono sincronizzati in qualsiasi altro sistema che si muova rispetto al primo.

Un corollario di questo teorema è:

due eventi che sono simultanei in un sistema di riferimento non lo sono in un altro che si muova rispetto al primo.

<sup>1</sup>Ove con  $G_c$  Minkowski indica il gruppo di trasformazioni che lasciano invariata la quantità 3.15

è importante osservare che questi due teoremi sono validi solo se i due eventi (o i due orologi considerati) non giacciono su piani perpendicolari alla direzione del moto relativo.

Omettiamo la dimostrazione e forniamo direttamente il risultato quantitativo:

se due orologi sono sincronizzati nel sistema di riferimento in cui sono fermi, essi non saranno sincronizzati in un altro sistema. Nel sistema in cui sono in moto, l'orologio <<inseguitore>><sup>2</sup> anticipa<sup>3</sup> di una quantità:

$$\Delta t_s = \frac{L_0 v}{c^2} \quad (3.22)$$

dove  $L_0$  è la distanza propria tra gli orologi.

Al fine di chiarire meglio il concetto poniamo il seguente problema:

Un osservatore su un'astronave dispone di un flash e di uno specchio. La distanza dallo specchio è 15 minuti-luce e l'astronave viaggia con velocità  $v = 0.8c$ . L'astronave passa davanti a una lunghissima piattaforma che ha due orologi sincronizzati, uno nel punto in cui si trova l'astronave quando l'osservatore fa partire un lampo e un altro nel punto in cui si trova l'astronave quando la luce torna riflessa dallo specchio. La situazione è schematizzata in figura 3.1.

Si trovino gli intervalli di tempo tra i due eventi (il lampo e l'ar-

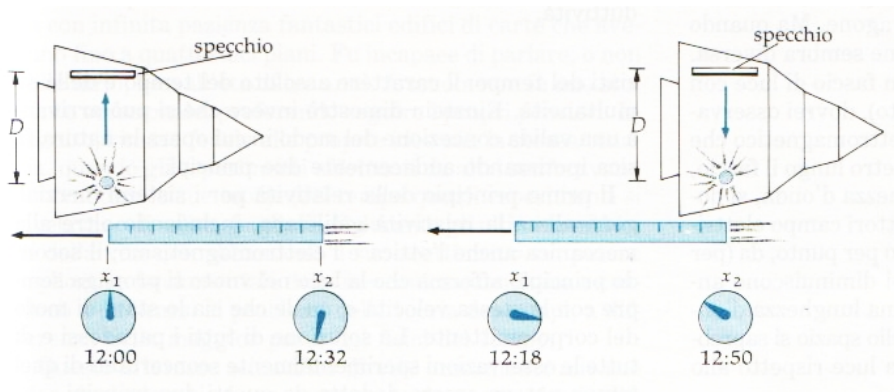


Figura 3.1: L'astronave compie un percorso sopra la piattaforma; nel frattempo un raggio di luce al suo interno parte da una sorgente, si riflette su uno specchio e ritorna verso la sorgente

rivo del lampo riflesso) nel sistema di riferimento dell'astronave e in quello della piattaforma, la distanza percorsa dall'astronave e la differenza dei tempi segnati dai due orologi quando sono visti dall'astronave. Sia  $S'$  il sistema solidale con l'astronave e  $S$  quello della piattaforma. Nel sistema dell'astronave il tempo che la luce impiega

<sup>2</sup> cioè quello che si muove verso l'altro orologio

<sup>3</sup> cioè indica un tempo posteriore

per andare e tornare è:

$$\Delta t' = \frac{2D}{c} = 30min$$

Durante questo intervallo di tempo l'astronave in S' percorre:

$$\Delta x' = v \cdot \Delta t' = 24c \cdot min$$

il sistema S vede l'intervallo di tempo fra i due eventi (partenza e arrivo della luce) più grande di un fattore  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{5}{3}$$

Onde si deduce che il tempo che intercorre in S è pari a:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 50min$$

Durante questo tempo per S l'astronave attraversa un percorso pari a:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 40c \cdot min$$

Dal punto di vista dell'osservatore sulla piattaforma l'orologio di S' è in ritardo rispetto al suo. I due orologi di S segnano 50 min mentre quello di S' segna 30 min. Analizziamo ora il problema dal punto di vista di S'. Gli orologi di S per S' non sono sincronizzati, ma l'orologio su  $x_2$  anticipa quello su  $x_1$  di

$$\frac{L_0 v}{c^2} = 32min \quad (3.23)$$

Supponiamo che all'istante iniziale un orologio solidale con S su  $x_1$  segni le 12:00 e che ve ne sia uno sincronizzato sempre rispetto a S su  $x_2$ . Per l'osservatore su S' quando egli è su  $x_1$  l'orologio su  $x_2$  in base alla 3.23 segna le 12:32. quando S' giunge su  $x_2$  l'orologio sulla piattaforma a lui vicino segna le 12:50 quindi egli pensa che per S siano passati:

$$50 - 32 = 18min$$

Quindi questo orologio ritarda secondo un fattore:

$$\frac{30}{18} = \frac{5}{3} = \gamma$$

Ogni osservatore vede gli orologi dell'altro ritardare. Secondo S l'unico orologio di S' è in ritardo perché misura solo 30min. Secondo S' gli orologi di S non solo ritardano ma sono fuori sincronismo di 32min: essi scandiscono 18 min durante il percorso, ma in virtù della mancanza di sincronismo l'orologio su  $x_2$  segna le 12:50.

### 3.3.1 Poincarè e la simultaneità

Il primo ad accorgersi che il concetto di simultaneità per eventi lontani non era nè ben definito nè tanto meno intuitivo fu Henri Poincarè. Nel 1898 egli scrisse l'articolo "La mesure du temps" nel quale analizzava il rapporto fra tempo psicologico e tempo fisico. Il tempo psicologico, afferma Poincarè ha un carattere qualitativo. L'uomo cioè riesce a stabilire se un avvenimento è anteriore ad un altro, ma non riesce a *quantificare* tale separazione.

Sempre su questo tema Poincarè scrive:

*"...due fatti psichici simultanei sono legati così strettamente, che l'analisi non può separarli senza mutarli. è lo stesso per due fatti fisici? Il mio presente non è più vicino al mio passato di ieri che al presente di Sirio?"*

Si può forse pensare il tempo fisico come il tempo di:

*"...un'intelligenza infinita, una specie di grande coscienza che vedrebbe tutto.."*

Resta però evidente che questa:

*"...intelligenza ipotetica, se anche esistesse, sarebbe impenetrabile a noi. Bisogna dunque cercare altro..."*

Un'altra possibilità di definire la simultaneità è quella di considerare simultanei due eventi quando la loro successione può essere invertita a volontà. Il problema però si sposta ora sulla ricerca di un metodo che ci permetta di determinare la successione fra due eventi. Si può dire che un evento A precede l'evento B se A è la *causa* di B. Cosa si intende però per *causa*? A è causa di B se A precede B; e si ricade in un circolo vizioso.

Anche il concetto di distanza rimanda a quello di simultaneità. In astronomia spesso abbiamo a che fare con eventi molto distanti. Osservando una stella distante 50 anni-luce pensiamo che il raggio di luce che ci arriva nel nostro presente sia stato irradiato dalla stella contemporaneamente ad un evento che sulla terra è avvenuto 50 anni fa.

Questa affermazione si fonda sulla conoscenza della velocità della luce che a sua volta si basa sulla validità di alcune leggi a partire dalle quali si costruiscono strumenti per la misura di tale velocità<sup>4</sup>. La velocità della luce, afferma Poincarè, dipende da queste leggi-base, per cui la velocità della luce potrebbe essere diversa, se si modificassero tali leggi.

Pertanto:

*"...la simultaneità di due eventi, o l'ordine della loro successione, l'uguaglianza di due durate, devono essere definite in maniera che l'enunciato delle leggi naturali sia il più semplice possibile. In altri termini, tutte queste definizioni non sono che il frutto di un opportunismo incosciente..."*

Un'altra questione correttamente messa in evidenza da Poincarè e che:

<sup>4</sup>Poincarè si riferisce in particolare alla misura eseguita da Roemer, ricavata attraverso l'osservazione del ritardo delle eclissi dei satelliti di Giove modellizzate secondo le leggi di Newton

*“...è difficile separare il problema qualitativo della simultaneità dal problema quantitativo della misura del tempo...”*

Anche nella misura del tempo ci si scontra con alcune problematiche, consistenti nella difficoltà di trovare un moto regolare (un sistema periodico privo di attrito ad esempio) per misurare il tempo. Poincaré afferma che:

*“...il tempo deve essere definito in modo che le equazioni della meccanica siano quanto mai semplici...”*

Ed in particolare insiste sul fatto che:

*“...non vi è maniera di misurare il tempo che sia più vera di un'altra; quella che è generalmente adottata è semplicemente più comoda...”*

Da queste ultime affermazioni si intravede la generale concezione di Poincaré della scienza. In base a tale concezioni le leggi della fisica sono solo convenzioni. Tali convenzioni però non sono arbitrarie. Esse nascono da esperimenti fondamentali che:

*“...hanno spinto i fondatori della scienza ad adottarle e che, nella loro imperfezione, erano sufficienti a giustificare la loro adozione...”*

### 3.3.2 La soluzione di Einstein

Nel suo articolo del 1905 sulla relatività ristretta Albert Einstein affronta il problema della simultaneità e della misura del tempo.

Mentre però Poincaré ha un approccio qualitativo del problema, Einstein ne ha uno originale e quantitativo, come delineato nei paragrafi precedenti. Come prima cosa Einstein fa notare come tutti i nostri giudizi in cui il tempo gioca una parte sono sempre giudizi su *eventi simultanei*. Se per esempio, io dico “Quel treno arriva alle 7”, intendo dire qualcosa del genere “l'evento *arrivo del treno* e l'evento *il mio orologio segna le 7 in punto* sono simultanei”.

Siamo quindi in grado di determinare se due eventi che avvengono nello stesso luogo siano simultanei oppure no. Cosa succede quando i due eventi non si verificano nello stesso posto? Si potrebbe far riferimento ad un unico orologio che si trova ad esempio nell'origine del mio sistema di riferimento. Però è evidente che tale soluzione non è indipendente dal punto dove si trova l'osservatore con l'orologio.

Einstein vede la soluzione del problema nell'utilizzo di una struttura di orologi che riempiono l'intero spazio e che sono associati allo specifico riferimento in cui si trova l'osservatore. Il problema risiede ora nel sincronizzare tali orologi.

A questo punto però Einstein si accorge che è necessario porre una definizione: la definizione di tempo. Consideriamo due orologi nei punti A e B; in generale i due orologi segnano due tempi distinti. Per avere una definizione di *tempo* stabiliamo arbitrariamente che il tempo che la luce impiega per andare da A a B sia uguale a quello che impiega per andare da B ad A. Consideriamo un raggio di luce che parte da A al tempo  $t_A$  ed arrivi in B al tempo  $t_B$ , infine torna in A dove l'orologio segna il tempo  $t'_A$ . In base alla definizione di tempo data sopra i due orologi sono sincroni se accade che  $t_B - t_A = t'_A - t_B$ . Questo passaggio è assolutamente importante per tutta la costruzione della teoria; in questo modo, infatti, Einstein dà una definizione operativa di tempo sulla quale

elaborerà tutta la relatività.

Lo stesso Einstein commenta l'importanza della definizione data e il suo carattere cruciale per tutta la fisica:

*“...con l'aiuto di alcuni esperimenti fisici immaginari abbiamo determinato quel che deve essere inteso per orologi inerziali sincroni posti in luoghi differenti ed abbiamo evidentemente ottenuto una definizione di simultaneo o sincrono, e di tempo...”*

è importante a questo punto chiarire, e lo fa lo stesso Einstein nella sua versione divulgativa della teoria della relatività, che l'aver affermato che la luce impiega lo stesso tempo per andare da A a B e da B ad A

*“...non è nella realtà nè una supposizione nè un'ipotesi circa la natura fisica della luce, bensì una convenzione che io posso fare a mio arbitro al fine di giungere a una definizione di simultaneità...”*

L'affermazione in oggetto non è dunque *falsificabile* in quanto è una *convenzione*. Se mai un esperimento confutasse la teoria nulla si potrebbe imputare a tale convenzione. Basti pensare che essa stessa fornisce il criterio che stabilisce come si possa fare una misura temporale (sperimentale).

Il concetto di tempo e di simultaneità sono quindi per Einstein pure convenzioni e questi lo afferma dichiarandosi vicino intellettualmente ad Hume:

*“...Hume vide chiaramente che alcuni concetti, come ad esempio quello di casualità, non si possono dedurre con metodi logici dai dati dell'esperienza. Kant, essendo fermamente convinto che certi concetti fossero indispensabili, e che fossero proprio quelli che si erano dimostrati tali nella pratica, li interpretò come le necessarie premesse di ogni tipo di speculazioni, e li distinse dai concetti di origine empirica. Io sono convinto, invece, che questa distinzione sia erronea, cioè che non ponga il problema nei suoi giusti termini. Tutti i concetti, anche quelli più vicini all'esperienza, sono dal punto di vista logico convenzioni liberamente scelte, come appunto nel caso del concetto di causalità da cui ebbe origine quest'ordine di problemi...”*

### 3.3.3 Il paradosso dei gemelli

Nel paragrafo 3.2 abbiamo parlato delle trasformazioni di Lorentz e della simmetria tra  $K$  e  $K'$ . In particolare abbiamo notato come l'osservatore *fisso*  $K$  sia portato a dire che il tempo su  $K'$  scorra dilatato, ovvero più lentamente. Per la già citata simmetria, però,  $K'$  a sua volta dovrà dire che il tempo su  $K$  scorre dilatato (dello stesso fattore, giacché i due sistemi si muovono con velocità relativa uguale in modulo e poiché non pensiamo che ci sia un verso privilegiato).

Ci si pone dunque come quesito chi dei due *abbia ragione* e si formula il seguente problema, noto come *paradosso dei gemelli* (se ne riporta una delle tante varianti):

Omero e Ulisse sono due gemelli identici. Ulisse viaggia fino a un pianeta posto al di là del sistema solare e ritorna, mentre Omero resta a casa. Quando si trovano, è più vecchio uno dei due gemelli o hanno entrambi la stessa età?

Supponiamo che la distanza tra la terra T e il pianeta P sia  $L_0 = 8\text{anni} - \text{luce}$  e che Ulisse si muova con velocità  $v = 0.8c$ , se ne deduce che  $\gamma = \frac{5}{3}$ . Analizziamo il problema dal punto di vista (riferimento) di Omero. Omero vede il fratello muoversi con velocità  $v$  da T a P e poi da P a T. Pertanto quando Ulisse arriva in P per Omero sono passati  $t = L_0/v = 10\text{anni}$ . Quindi il fratello ritorna in T quando per Omero sono passati  $20\text{anni}$ .

Secondo l'orologio di Ulisse, invece, il tempo impiegato per arrivare a P è, in accordo con le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 6\text{anni}$$

Quindi il tempo trascorso in totale per Ulisse è pari a  $12\text{anni}$ . D'altro canto Ulisse vede avvicinarsi il Pianeta P con velocità  $v$ . La distanza da lui misurata fra T e P è pari a

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = 4.8\text{anni} - \text{luce}$$

Il tempo impiegato per arrivare su P misurato da Ulisse è dunque:

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{4.8}{0.8} = 6\text{anni}$$

in perfetto accordo con il tempo precedentemente ottenuto.

Ci si trova davanti ad un risultato apparentemente paradossale: Omero è invecchiato 8 anni in più rispetto al fratello. Inoltre se si analizza l'andamento dell'orologio di Omero attraverso l'orologio di Ulisse (si considera cioè Omero in moto rispetto ad Ulisse con velocità  $v$ ) si ottiene che secondo Ulisse il tempo trascorso per Omero dopo il viaggio è:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} = 7.2\text{anni}$$

Perché invece per Omero sono passati 20 anni e anziché essere più giovane, come direbbe il fratello, egli è invece più vecchio di 8 anni? Questo è il paradosso.

Cominciamo a risolvere parte di questo paradosso facendo notare che i due fratelli non sono in condizioni di perfetta simmetria: Ulisse infatti subisce una

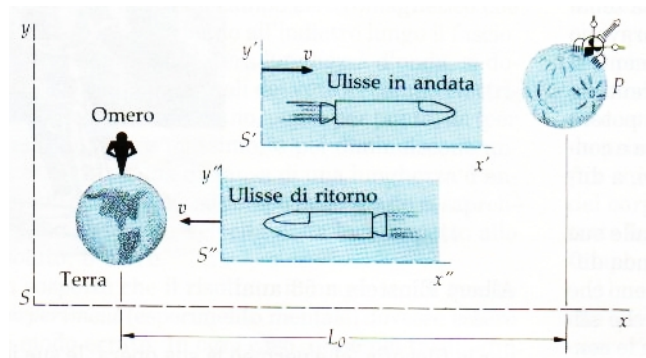


Figura 3.2: I due gemelli del paradosso; Ulisse va verso il pianeta P e ritorna mentre Omero resta sulla terra (T)

accelerazione o una decelerazione ogni volta che parte o arriva su un pianeta. Esso perciò non si trova sempre in un sistema di riferimento inerziale come Omero, per cui le trasformazioni di Lorentz non valgono per Ulisse. Notata tale asimmetria ci si spiega perché i due fratelli non invecchino di un numero uguale di anni. Però sorge spontanea un'altra domanda: cosa accade mentre Ulisse sta rallentando o sta partendo? Per rispondere in maniera del tutto esaustiva a questa domanda si dovrebbero estendere le trasformazioni di Lorentz a sistemi non inerziali (problema oggetto della relatività generale). Si può però affrontare il problema analizzando la mancanza di sincronia degli orologi in moto.

Supponiamo che in T e in P ci siano due orologi identici, sincronizzati rispetto ad Omero. Ulisse, in base alle trasformazioni di Lorentz, li vede desincronizzati di 6.4 anni. Per l'esattezza Ulisse osserva che l'orologio in P anticipa di 6.4 anni quello sulla terra. Quando Ulisse è sul punto di arrivare in P per lui sulla terra sono trascorsi 3.6 anni. Quando egli si ferma egli si trova nello stesso sistema di riferimento di Omero e quindi l'orologio in P deve essere sincronizzato con l'orologio in T. Pertanto l'orologio sulla terra deve recuperare i 6.4 anni di sfasamento. Questi, sommati ai 3.6 anni conteggiati da Ulisse danno il tempo rilevato da Omero: 10 anni. Un discorso del tutto analogo si può fare considerando il ritorno di Ulisse.

Pertanto il carattere paradossale del problema consiste solo nel considerare i due osservatori equivalenti ed entrambi in sistemi di riferimento inerziali.

### 3.4 Centralità del processo di misura in Schlick e Bridgman

Nella sua opera "Spazio e tempo nella fisica contemporanea" pubblicato nel 1917 il filosofo Moritz Schlick espone, insieme alla teoria della relatività (ristretta e generale), un commento epistemologico sulla teoria.

Una delle domande oggetto di discussione fu *Tempo e Spazio sono veramente qualcosa di reale?* Cosa però si può definire reale? Secondo Planck tutto ciò che si può misurare esiste. Ma lo spazio e il tempo si possono misurare? Sì, però solo attraverso strumenti di misura che obbediscono agli stessi postulati dello spazio in cui si trovano e che deve essere misurato.

E come deve essere considerato lo spazio che ci circonda? Secondo il pensiero di Helmholtz potremmo, se ci tornasse utile, considerare lo spazio che ci circonda come quello che appare in uno specchio convesso. Dovremmo modificare le espressioni che riguardano le distanze poiché ci sono le dilatazioni e le contrazioni prodotte dallo specchio. Anche le leggi della meccanica dovrebbero essere riformulate giacché ci si accorge facilmente che già il primo principio della dinamica non vale più, così come esso è formulato, in un tale spazio.

Ma qual è la forma propria dello spazio che ci circonda? Gauss calcolò la somma degli angoli interni di un triangolo che aveva i vertici su tre montagne non si discostava molto da  $180^\circ$ , ma anche se il risultato fosse stato significativamente diverso egli lo avrebbe potuto giustificare assumendo o che i raggi di luce fossero curvi o che i raggi fossero rettilinei e che la geometria non fosse euclidea.

Da questo Schlick deduce che:

*“...Non è quindi corretto affermare che l’esperienza potrebbe dimostrarci l’esistenza di una struttura non-euclidea, e cioè che essa potrebbe costringerci a scegliere tra le due possibili assunzioni...”*

e in questo modo dichiara che lo scegliere una spiegazione piuttosto che un’altra è un fatto almeno in parte *convenzionale*. Tuttavia la scelta di una convenzione piuttosto che un’altra:

*“...non si fonda semplicemente su un’esigenza di economia pratica, nel desiderio di una specie di comodità intellettuale (come pure si è creduto), ma ha un fondamento logico nella circostanza che la teoria più semplice contiene un minimo di momenti arbitrari...”*

Dunque spazio e tempo sono reali, in accordo con le affermazioni di Planck, in quanto sono misurabili. La loro struttura si può definire convenzionalmente, tenendo presente che in tale definizione viene osservato il principio di semplicità.

Un altro autore, Percy W. Bridman, fisico e filosofo, pubblica nel 1927 “La logica della fisica moderna”. Ispirandosi alla teoria della relatività e alle teorie di Planck, Bridman fornisce una interessante riflessione sul rapporto tra concetti ed esperienza. In tale opera l’autore, apparendo ancora sorpreso dalla teoria sviluppata da Einstein, propone:

*“...di dedicarci alla ricerca di una compressione così profonda del carattere dei nostri rapporti mentali con la natura, che diventi impossibile un altro cambiamento nel nostro atteggiamento come quello dovuto ad Einstein...”*

L’idea di base di Bridman è quella che lo scienziato non debba ammettere alcun principio a priori che possa limitare le possibilità di nuove esperienze. L’atteggiamento del fisico deve essere, pertanto, basato sul puro empirismo.

I concetti devono essere strettamente correlati con l’esperienza ad esempio lo stesso Bridman dice:

*“...Per trovare la lunghezza di un oggetto, dobbiamo compiere certe operazioni fisiche. Il concetto di lunghezza risulta pertanto fissato quando sono fissate le operazioni mediante cui la lunghezza si misura; vale a dire, il concetto di lunghezza implica nè più nè meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza si determina[...].il concetto è sinonimo del corrispondente gruppo di operazioni...”*

L’intenzione di Bridman è chiara. Egli, delucidando rigidamente la metodologia da seguire, vuole eliminare la possibilità che lo scienziato cadendo nelle sue *abitudini mentali*, di fronte a nuove scoperte, sia tentato di fornire spiegazioni artificiose ed astratte:

*“...molti scopriranno in se stessi un desiderio di spiegazioni meccaniche dotato della tenacità del peccato originale. [...] Nondimeno, come gli antichi eremiti lottavano per dominare la carne, così il fisico deve lottare contro questo desiderio talvolta irresistibile, ma del tutto ingiustificato...”*

Rinunciando quindi ad una spiegazione erronea fornita dalle insufficienti categorie mentali formatesi in giovinezza l’atteggiamento dello scienziato deve:

*“...imitare esattamente il neonato, cioè aspettare fino a che abbiamo accumulato tanta esperienza del nuovo tipo da familiarizzarci con essa, poi riprendere il processo esplicativo con elementi portati dalla nuova esperienza nel complesso dei nostri assiomi [...] tutta la nostra conoscenza è in termini di esperienza; non dobbiamo sperare o desiderare di costruire una struttura esplicativa avente carattere diverso dall’esperienza...”*

Diversamente da Poincarè, Bridgman non dà alcuna indicazione sul metodo da seguire per definire una misura. Tuttavia egli dice che se di un fenomeno si possono dare più spiegazioni allora c’è qualcosa di insoddisfacente in tutta la teoria. Egli inoltre fonda tutta la conoscenza scientifica sui dati sperimentali e quindi sullo stesso processo di misura.

### 3.5 Relazionismo o sostanzialismo?

Nei paragrafi precedenti abbiamo descritto diversi punti di vista riguardo spazio e tempo. Ricordiamo che secondo Schlick e Bridgman lo spazio e il tempo sono due grandezze reali perché esse possono essere misurate, le loro proprietà possono essere dedotte a partire dalle relazioni che intercorrono tra gli oggetti che permettono di fare queste misure.

La loro visione, di tipo relazionista, appare in sintonia con quella dello stesso Einstein il quale nel 1952 dichiara che:

*“...lo spazio-tempo non è di necessità qualcosa a cui si possa attribuire un’esistenza separata, indipendente dagli oggetti effettivi della realtà fisica. Gli oggetti fisici non sono nello spazio. Bensì spazialmente estesi. In tal modo il concetto di spazio vuoto perde il suo significato...”*

In base a tale opinione Eddington afferma che:

*“...sembra logico concludere che lo spazio, così come noi lo conosciamo deve essere l’astrazione di queste relazioni materiali, e non qualcosa di più trascendente...”*

Diverso è invece l’approccio di Minkowski, che affronta il problema da un punto di vista prettamente matematico. Lo spazio-tempo viene interpretato come una realtà effettiva descritta dalle proprietà matematiche degli invarianti. Tale realtà si trova in contrapposizione alle sue proiezioni puramente spaziali o temporali.

Diversamente dal pensiero di Einstein, quindi, per Minkowski lo spazio-tempo è una realtà sostanziale.

Egli inquadra le quattro dimensioni in un ambito strettamente matematico prima di identificarle come spazio e tempo. Da un punto di vista fisico questa operazione sembra non aver senso: come si può osservare lo spazio e il tempo dall’esterno? Di fatto la speculazione di Minkowski ha senso solo se, come egli stesso fa, si ci basa non sulla fisica, ma sulla matematica, e si assume che sia valida:

*“...l’idea di una armonia prestabilita tra la pura matematica e la fisica<sup>5</sup>...”*

---

<sup>5</sup>Minkowski

Le due interpretazioni di spazio e tempo, relazionista e sostanzialista, sono tutt'oggi motivo di dibattito quando ci si chiede quale sia il significato epistemologico da attribuire alla teoria della relatività.

### 3.6 Il ruolo dell'osservatore

Il concetto di osservatore nell'articolo del 1905 di Einstein non appare ben definito. Il termine compare solo nel paragrafo in cui egli parla di simultaneità e il suo compito è semplicemente quello di leggere un orologio. Nella parte rimanente dell'articolo Einstein riferisce le misure, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi ad un *sistema di riferimento inerziale*. Parecchi autori, però descrivendo la teoria della relatività parlano di osservatore, in un senso che non è definito, e che quindi lascia adito ad equivoci. Così, ad esempio, alcuni nell'interpretare la contrazione di Lorentz parlano di un *effetto psicologico* e non fisico.

A creare ulteriore confusione fra osservatore in senso antropomorfo e osservatore in senso fisico contribuisce anche Eddington il quale scrive:

*“...Non c'è essenziale differenza tra le misure scientifiche e le misure dei sensi. In ambedue i casi la conoscenza del mondo esterno avviene tramite canali materiali; il corpo dell'osservatore può essere considerato come parte della strumentazione del proprio laboratorio, e, per quanto ne sappiamo, esso obbedisce alle stesse leggi. Quindi noi mettiamo insieme percezioni e misure scientifiche, e quando parliamo di un osservatore particolare noi includiamo tutti i suoi apparati di misura...”*

La letteratura non strettamente scientifica ha contribuito enormemente ad aumentare i malintesi inerenti all'interpretazione delle trasformazioni di Lorentz. La confusione, nella maggior parte dei casi, trae i suoi principi dal considerare l'osservatore un essere umano. Basti pensare che, in un articolo comparso alla fine degli anni '50 ad esempio, compare un'interpretazione della contrazione delle lunghezze alquanto bizzarra. L'osservatore nel sistema di riferimento *fisso* viene identificato come un occhio (o come una macchina fotografica) che osserva il regolo in moto e ne vede la contrazione a causa di un *effetto prospettico*.

Questo esempio evidenzia palesemente che, attraverso piccoli cambiamenti dei termini, osservazioni corrette si possono trasformare in affermazione del tutto prive di senso.

Quello che è evidente, e sul quale bisogna fare comunque chiarezza, è che esistono due tipi metodi di misura: quello che utilizza un sistema di orologi sincroni e quello che utilizza un osservatore posto su un punto del riferimento. È ovvio che in quest'ultimo caso agli effetti relativistici si sovrapporranno quelli prospettici, ma è pur chiaro che i due effetti sono di natura totalmente diversa. È da notare che, sempre nel secondo caso, abbiamo utilizzato il termine *osservatore* con il suo significato comune di *essere umano* che occupa un determinato punto dello spazio.

La definizione scientifica di osservatore è invece quella fornita da Resnick:

*“...un osservatore è in realtà un sistema infinito di orologi di registrazione distribuiti per tutto lo spazio, in riposo e sincronizzati l'uno rispetto all'altro...”*

Da tale definizione risulta evidente che il concetto di osservatore e di misura sono intrinsecamente correlati. Dal punto di vista relazionista l'osservatore assume un ruolo centrale, poiché è proprio l'osservatore che compie le misure, e la misura rappresenta il criterio di realtà (Planck). Secondo la visione sostanzialista l'attenzione è invece centrata sugli invarianti, cioè su quell'intervallo che non cambiano al variare del cambiamento del sistema di riferimento. Eddington afferma a proposito che:

*“...possiamo pensare l'intervallo come qualcosa di intrinseco alla natura esterna - una relazione assoluta fra i due eventi, che non ha bisogno di nessun osservatore particolare...”*

Una delle conseguenze di tale ragionamento è che la domanda “Qual è la lunghezza *vera* di un regolo (o di un qualsiasi oggetto)?” non ha alcun senso in relatività. Per un relazionista la lunghezza dipende dal sistema di riferimento; per un sostanzialista invece la lunghezza non è una grandezza assoluta.

Questo spiega perché il secondo postulato enunciato nel paragrafo 3.1 venga chiamato da Einstein *postulato di relatività* mentre da Minkowski *postulato del mondo assoluto*<sup>6</sup>.

È importante far notare come questa diatriba non riguardi l'aspetto fisico della teoria. Entrambi sono d'accordo sulla coerenza di risultati teorici e risultati sperimentali. Il disaccordo è puramente sul piano epistemologico, cioè sul modo in cui questa teoria influenzi il modo in cui l'uomo vede il mondo.

### 3.7 L'equivalenza fra massa ed energia

Come già discusso nel paragrafo 3.2 l'equazione 3.19 riinvia all'equivalenza fra massa ed energia messa in evidenza dagli esperimenti di fisica nucleare.

Tale equivalenza sembra in qualche modo dissolvere la consistenza corporea tradizionale della materia, la quale nel processo di annichilazione sembra quasi *“scompare nella fluidità impalpabile dell'energia”* [6].

Ancora una volta, però, bisogna fare un po' di chiarezza sui termini che utilizziamo altrimenti rischiamo di ricadere in speculazioni filosofiche alquanto semplicistiche.

In primo luogo occorre non confondere il concetto di *materialità* con quello di *impenetrabilità*. Consideriamo una radiazione di energia. Essa è penetrabile, ma non è *immateriale*.

*“...la materialità può essere considerata comune sia ai corpi che ai campi, dotati di massa-energia e quindi in grado di determinare la metrica dello spazio-tempo<sup>7</sup>; la impenetrabilità invece era legata, quantisticamente, al principio di Pauli e quindi era proprietà dei campi fermionici e delle loro particelle, mentre la compenetrabilità era caratteristica propria dei campi bosonici come quello elettromagnetico e alle loro particelle...”* [6]

<sup>6</sup>il termine assoluto viene utilizzato da Minkowski con il significato di *indipendente dall'osservatore*

<sup>7</sup>Il fatto che la massa-energia cambi la metrica dello spazio-tempo è un risultato della teoria della relatività generale

La trasformazione fra massa ed energia ha fatto pensare al superamento del concetto di materia e della sua consistenza ontologica. Basti pensare che alcune speculazioni filosofiche hanno attribuito tale trasformazione ad un *Essere necessario* o comunque a qualche *atto creativo*.

*“...In realtà l’equazione einsteiniana<sup>8</sup> non toglie consistenza ontologica alla materia, nè rimuove le conclusioni filosofiche generalmente di ordine metafisico, circa la sua dipendenza nell’essere, o i suoi rapporti con ciò che la filosofia chiama spirito...”* [6]

Quello che, invece, vuol significare l’equazione in oggetto e che la materia e l’energia non possono essere considerate grandezze indipendenti. Si pensi ad esempio al principio di conservazione dell’energia e al principio di conservazione della massa. Tali principi, in virtù delle nuove scoperte, non sono più validi singolarmente, ma vale un principio più generale, quello della conservazione di massa-energia, che tiene conto della loro dipendenza, se vogliamo considerabile come una sorta di:

*“...presenza comune, quasi di virtuale reciprocità, l’una nell’altra...”*

[6]

---

<sup>8</sup> $E = mc^2$

## Capitolo 4

# Cenni di relatività generale

### 4.1 Il principio di equivalenza

La generalizzazione della teoria della relatività a sistemi di riferimento non inerziale fu pubblicata da Einstein nel 1916. Il suo sviluppo si basa sul seguente principio:

un campo gravitazionale omogeneo è del tutto equivalente a un sistema di riferimento uniformemente accelerato.

Lo stesso Einstein parlò del momento cruciale in cui si accorse che la teoria della relatività ristretta doveva essere ampliata:

*“...Che la teoria della relatività ristretta fosse solo il primo passo di uno sviluppo necessario, mi divenne perfettamente chiaro solo durante i tentativi fatti per rappresentare la gravitazione nell’ambito di questa teoria.[...] Allora mi venne in mente questo: l’uguaglianza della massa inerte e di quella pesante, cioè l’indipendenza dell’accelerazione gravitazionale della natura di ciò che cade, può essere espressa come segue: in un campo gravitazionale (di piccola estensione spaziale) tutto accade come in uno spazio libero da gravitazione, purché vi si introduca, al posto di un sistema inerziale, un sistema di riferimento accelerato rispetto a un sistema inerziale...”*

Il principio d’equivalenza trae fondamento dall’apparente identità tra massa gravitazionale e massa inerziale.

Si consideri ad esempio una cabina nello spazio, lontana da altra materia, e soggetta ad una accelerazione uniforme  $\vec{a} = -\vec{g}$ . Qualunque esperimento meccanico fatto all’interno della cabina (misura di un peso, oscillazioni di un pendolo, ecc.) darebbe lo stesso risultato se la cabina non risultasse accelerata, ma immersa in un campo gravitazionale costante  $\vec{g}$ .

L’ipotesi di Einstein consiste nell’assumere che questa equivalenza, provata per i fenomeni meccanici, valga per qualsiasi esperimento fisico. Tale principio è stato fin’ora confermato da diversi esperimenti.

Un raggio di luce che entra in un campo gravitazionale viene deflessa proprio come se al posto del campo  $\vec{g}$  ci fosse in un riferimento che si muove con accelerazione  $\vec{a} = -\vec{g}$ .

Una seconda conferma della teoria della relatività generale è l'eccesso nella precessione dell'orbita di Mercurio, di circa 0.01 al secolo.

Una previsione della teoria è quella che gli intervalli di tempo, e di conseguenza ad esempio le frequenze, variano in un campo gravitazionale non equipotenziale. Secondo la teoria, infatti, gli orologi sono più lenti nelle regioni di basso potenziale gravitazionale. Definiamo:

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (4.1)$$

il potenziale gravitazionale in un punto distante  $r$  dalla massa che produce il campo. Sia  $\Delta t_1$  un intervallo di tempo misurato da un orologio dove il potenziale gravitazionale è  $\phi_1$  e  $\Delta t_2$  lo stesso intervallo misurato da un orologio posto in una zona dove il potenziale vale  $\phi_2$ , la relatività generale predice il seguente risultato:

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{1}{c^2}(\phi_2 - \phi_1) \quad (4.2)$$

dove  $\Delta t$  può essere ciascuno dei due intervalli giacché la variazione è in genere molto piccola. Quindi un orologio in una zona a basso potenziale gravitazionale ritarderà rispetto ad un altro che si trova in una zona a potenziale maggiore.

Questo effetto si ripercuote nelle frequenze producendo un risultato che è noto come *gravitational red shift*.

## 4.2 Il criterio della perfezione interna

Il motivo epistemologico che spinge Einstein a formulare la teoria della relatività generale è quello di trovare una spiegazione sempre più unificata di tutta la fisica, partendo da una critica al quadro scientifico che gli si prospettava specie in ambito metodologico e forgiando una teoria che rispondesse ad un bisogno di semplicità e di eleganza. A tal proposito Einstein scrive:

*“...Prima di iniziare una critica [...] della fisica è necessario premettere qualche considerazione generale sui principi in base ai quali è possibile criticare le teorie fisiche. Il primo principio è ovvio: la teoria non deve contraddire i fatti empirici. [...] Il secondo principio non ha avuto per oggetto il rapporto tra teoria e materiale di osservazione, bensì le premesse della teoria stessa, o ciò che brevemente, se pur vagamente, potrebbe definirsi naturalezza o semplicità logica delle premesse (ossia dei concetti fondamentali e delle corrispondenti relazioni reciproche poste a base di essi). [...] Il secondo principio, insomma, si può brevemente caratterizzare dicendo che si riferisce alla perfezione interna della teoria, mentre il primo si riferiva alla conferma esterna...”*

Questo principio di semplicità risulta utile non solo nella parte inerente alla formulazione della teoria, ma anche nella fase di confronto con i risultati sperimentali:

*“...Quanto più i concetti e gli assiomi fondamentali si allontanano da ciò che è direttamente osservabile e quanto più laborioso diventa quindi il confronto delle implicazioni della teoria con i fatti...”*

E sempre dall'esigenza di semplicità comincia la ricerca degli *invarianti* e delle *simmetrie* delle leggi naturali. Si passa dalla ricerca di *covarianza* per sistemi inerziali della relatività ristretta ad un classe più ampia di leggi *covarianti* nella relatività generale.

Il criterio della perfezione interna, inteso come semplicità, non poteva non sfociare in un desiderio di una teoria che *unificasse* tutti i fenomeni fisici. Del resto la storia stessa sembra indicarci chiaramente questa via: Newton, Galileo e Keplero hanno unificato meccanica celeste e meccanica terrestre, Maxwell ha unificato fenomeni elettrici e fenomeni magnetici, la relatività ristretta ha giustificato contemporaneamente fenomeni elettromagnetici e fenomeni meccanici. Per la teoria della relatività generale lo stesso Einstein dice:

*“...Tutte le teorie hanno finora sentito il bisogno di disporre, oltre che delle leggi di campo, di leggi particolari per il moto di entità materiali sotto l'influenza dei campi...”. Diversamente nella teoria della relatività generale “...la legge del moto non deve (e non può) essere postulata indipendentemente[...] essa è già implicitamente contenuta nella legge del campo gravitazionale...”*

Purtroppo Einstein non riuscì a completare l'unificazione. Egli avrebbe desiderato introdurre anche l'elettromagnetismo in una teoria ancora più generale. Tale problema, lasciatici da lui in eredità, è ancora irrisolto.

### 4.3 Lo spazio curvo di Riemann

Abbiamo parlato nel paragrafo 3.2.1 di come Minkowski sia riuscito a fornire una visione puramente matematica della teoria della relatività ristretta. Lo spazio-tempo, come lo intendeva Minkowski, può essere immaginato come uno spazio piatto, in quanto le equazioni che regolano tale spazio (le trasformazioni di Lorentz) sono equazioni lineari.

Ciò non accade in relatività generale, dove le analoghe equazioni sono *non lineari*. Di conseguenza vi è la necessità di introdurre uno spazio-tempo *curvo* basato sulla geometria di Riemann. Il cronotopo non segue più le regole della geometria euclidea. La relatività generale per la prima volta segue una teoria di campo non lineare, obbedendo quindi a una tipologia di equazioni che permetteranno successivamente lo sviluppo della teoria del caos deterministico e della complessità.

# Bibliografia

- [1] R. Luperini, Pietro Cataldi, Lidia Marchiani, Franco Marchese: *La scrittura e l'interpretazione*, Edizione Rossa, Volume 3 Tomo II, Editore: G.B. Palumbo (1998)
- [2] N. Abbagnano, G. Fornero: *Filosofi e Filosofie nella Storia*, Volume 3, Editore: Paravia (1992)
- [3] A. Einstein: *Come io vedo il mondo. La teoria della relatività*, Editore: Grandi tascabili economici Newton (1990)
- [4] P.A. Tipler: *Invito alla fisica*, Volume 3, Editore: Zanichelli (1999)
- [5] P. Pendenza: *Una riflessione sulla relatività ristretta, fra storia ed epistemologia*,  
[http://www.a-i-f.it/STORIA/Download/PDF/Pendenza% 202001.pdf](http://www.a-i-f.it/STORIA/Download/PDF/Pendenza%202001.pdf)
- [6] A. Strumia: *Teoria della relatività*,  
<http://www.ciram.unibo.it/~strumia/presentazioni/relativita.pdf>